EGY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI FELADATRÓL

PRÉKOPA ANDRÁS (Debrecen)*

Az előadás célja egy valószínűségszámítási feladat megoldása és néhány érdekes azonosság felállítása, melyek a valószínűségek összegezésének segítségével trivialitásként adódnak. A megoldásra kerülő feladat egy általánosítását adja a *The American Math. Monthly 56* (1949) kötete 343. oldalán található 4348. sz. problémának, melyet *D. A. Darling* (Rutgers University) tűzött ki. A gondolatmenet könnyű áttekintése érdekében tekintsük előbb ezt a speciális esetet, melyet diszkrét eloszlás esetének lehet nevezni.

A probléma a következő: Banach professzor megszokta, hogy kabátjának mindkét zsebében hord egy-egy gyufásdobozt. Pipára gyujtás alkalmával találomra előhúz egy gyufaszálat valamelyik dobozból. Mindegyik dobozban eredetileg n gyufaszál volt. Banach kérdése: ha első alkalommal történik meg, hogy egy dobozt előhúzva üresnek találja, mennyi a másik dobozban e pillanatban található gyufaszálak számának várható értéke.

Tegyük fel, hogy a bal zsebéből fogytak ki a gyufaszálak. Jelöljük B-vel a bal, J-vel a jobb zsebből előhúzott gyufaszálakat és vegyünk egy húzási sorozatot:

$$B\,B\,J\,B\,J\,J \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots |B$$

ahol a feltevés értelmében a vonás előtt B n-szer fordul elő, a vonás utáni B pedig az üresen előhúzott dobozt jelenti. J előfordulásainak száma legyen k. Az összes lehetséges sorrendeket tekintetbe véve azt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy amikor először üresen találta a balzsebében levő dobozt, a jobbzsebében levő dobozban k gyufaszál legyen:

$$\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}. \tag{1}$$

M-mel jelölve a másik dobozban maradó gyufák számának várható értékét, mivel mindegy, hogy melyik zsebét találta először üresen, azt kapjuk, hogy

$$M = 2\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}. \tag{2}$$

* 1950. szeptember 1-én tartott előadás.

Ezt a formulát a valószínűségek összegét megadó

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = 1 \tag{3}$$

kifejezés segítségével a következőképpen alakíthatjuk át:

$$M = n - \sum_{k=1}^{n} k \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1+1}{k-1} \frac{n+1}{2^{n+k-1+1}} =$$

$$= n - \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1+l}{l} \frac{n+1}{2^{n+1+l}} + \binom{2n+1}{n} \frac{n+1}{2^{2n+1}} + \binom{2n+2}{n+1} \frac{n+1}{2^{2n+2}} =$$

$$= \binom{2n+1}{n} \frac{n+1}{2^{2}} - 1. \tag{4}$$

A Stirling-formula segítségével előállíthatjuk M aszimptotikus kifejezését:

$$M \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

A feladatot könnyen át lehet fogalmazni r doboz, $S_1, S_2, \ldots, S_r$ számú gyufa és $p_1, p_2, \ldots, p_r$ különböző húzási valószínűségek esetére $(0 \leqq p_i \leqq 1)$. Az $r = 2$ esetben, ha az $S_1 = m$, $S_2 = n$, $p_1 = x$, $p_2 = 1 - x$ jelöléseket vezetjük be, a következő azonosságot nyerjük:

$$x^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} (1-x)^k + (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} x^k = 1.$$

Az általános esetben:

$$x_1^{S_1-1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \sum_{k_3=0}^{S_3} \cdots \sum_{k_r=0}^{S_r} \frac{(S_1+k_2+\cdots+k_r)!}{S_1!\,k_2!\cdots k_r!} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \cdots x_r^{k_r} + \tag{5}$$

$$+ x_2^{S_2+1} \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_3=0}^{S_3} \cdots \sum_{k_r=0}^{S_r} \frac{(k_1+S_2+k_3+\cdots+k_r)!}{k_1!\,S_2!\,k_3!\cdots k_r} x_1^{k_1} x_3^{k_3} \cdots x_r^{k_r} + \cdots +$$

$$+ x_r^{S_r+1} \sum_{k_1=0}^{S_1} \sum_{k_2=0}^{S_2} \cdots \sum_{k_{r-1}=0}^{S_{r-1}} \frac{(k_1+\cdots+k_{r-1}+S_r)!}{k_1!\cdots k_{r-1}!\,S_r!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{r-1}^{k_{r-1}} = 1,$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1.$$

A probléma általánosítását a következőképpen szövegezhetjük meg: vegyünk két tartályt, melyeket B-vel és J-vel jelölünk és melyek A_1 illetve A_2 vízmennyiséget tartalmaznak. Időnként valamelyik tartályból bizonyos mennyiségű vizet öntünk ki. Annak a valószínűsége, hogy a B tartályból öntsünk ki vizet, legyen p, annak a valószínűsége, hogy a J tartályból, legyen $q = 1 - p$. Ha az öntést folytatjuk, lesz egy olyan pillanat, amikor valamelyik tartályból éppen elfogy a víz. Kérdés, mennyi a másik tartályban e pillanatban található vízmennyiség várható értéke. (A várható értéket az előbbi esettel szemben most éppen a kiürülés pillanatára számítom.)

Először tegyük fel, hogy $p = q = 1/2$, $A_1 = A_2 = A$, továbbá, hogy annak a valószínűsége, hogy egy alkalommal $< x$ vízmennyiséget vegyünk ki a B tartályból, $F(x)$, legyen egyenlő a J tartály megfelelő valószínűségével $G(x)$-szel, $F(x) \equiv G(x)$.

Legyen $F_n(x)$ annak a valószínűsége, hogy egy tartályból n öntéssel összesen $< x$ vizet öntsünk; könnyen nyerjük, hogy

$$F_n(x) = \int_0^x F(x-z)\, dF_{n-1}(z),$$

ahol

$$F_1(x) = F(x), \quad F_0(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

Annak a valószínűsége, hogy n öntés után egy tartály üres legyen:

$$F_{n-1}(A) - F_n(A).$$

Annak a valószínűsége, hogy a B tartály n öntés után üres legyen, továbbá a J tartályból ezen időpontig k öntés történjék és a k öntés után bennmaradó vízmennyiséget v-vel jelölve $A - x - \Delta x \leqq v < A - x$ legyen,

$$\Big(F_{n-1}(A) - F_n(A)\Big)\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^{n+k}}\Delta F_k(x),$$

ahol $\Delta F_k(x) = F_k(x + \Delta x) - F_k(x)$.

Mivel mindegy, hogy melyik tartály lesz előbb üres és hány öntés segítségével, továbbá, hogy hány öntés történt az egyikből, mielőtt a másik kiürült, azt kapjuk, hogy M-mel jelölve a másik tartályban maradt vízmennyiség várható értékét,

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2\int_0^A \Big(F_{n-1}(A) - F_n(A)\Big)\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^{n+k}}(A-x)\, dF_k(x). \quad (6)$$

Abban az esetben, ha $F(x) \not\equiv G(x)$, $p \neq q$, $A_1 \neq A_2$, a várható érték:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\Big(F_{n-1}(A_1) - F_n(A_1)\Big)\binom{n+k-1}{k}p^n q^k \int_0^{A_2}(A_2 - x)\, dG_k(x) +$$

$$+ \Big(G_{n-1}(A_2) - G_n(A_2)\Big)\binom{n+k-1}{k}p^k q^n \int_0^{A_1}(A_1 - x)\, dF_k(x)\Bigg]. \quad (7)$$

A megmaradó víz eloszlásfüggvénye mindjárt az utóbbi, általános esetre írva fel:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(F_{n-1}(A_1) - F_n(A_1)\right) \binom{n+k-1}{k} p^n q^k G_k(x) + \right.$$

$$\left. + \left(G_{n-1}(A_2) - G_n(A_2)\right) \binom{n+k-1}{k} p^k q^n F_k(x) \right]. \tag{8}$$

Ha r tartályt veszünk

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ vízmennyiségekkel,
$x_1, x_2, \ldots, x_r$ valószínűségekkel és
$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(r)}$ öntési eloszlásfüggvényekkel,

akkor a valószínűségek összegeként kapjuk a következő azonosságot:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \left(F^{(1)}_{k_1-1}(A_1) - F^{(1)}_{k_1}(A_1) \right) F^{(2)}_{k_2}(A_2) \ldots$$

$$\ldots F^{(r)}_{k_r}(A_r) \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \left(F^{(2)}_{k_2-1}(A_2) - F^{(2)}_{k_2}(A_2) \right) F^{(1)}_{k_1}(A_1) \ldots$$

$$\ldots F^{(r)}_{k_r}(A_r) \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} + \tag{9}$$

$$+ \text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —} +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=1}^{\infty} \left(F^{(r)}_{k_r-1}(A_r) - F^{(r)}_{k_r}(A_r) \right) F^{(1)}_{k_1}(A_1) \ldots$$

$$\ldots F^{(r-1)}_{k_r-1}(A_{r-1}) \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} \equiv 1,$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 1,$$

mely azt fejezi ki, hogy bizonyos számú öntés után valamelyik tartályból elfogy a víz.

Végül még azt a megjegyzést szeretném tenni, hogy az általános eset a diszkrét esetet, mint speciális esetet tartalmazza (a várható érték számításának időpontjára vonatkozó megfelelő módosítással), ha $A_1 = A_2 = A$ egész szám, $p = q = 1/2$ és

$$F(x) = G(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 1), \\ 1 & (x > 1). \end{cases} \tag{10}$$

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. ПРЕКОПА (Дебрецен)

Проблема, решенная в работе тотчас же в общем случае, гласит: Пусть даны два резервуара A и B содержащие соответственно A_1 и A_2 количества воды. Если выпускать воду наугад то из одного то из другого резервуаров, то после некоторого времени один из резервуаров окажется пустым. Вопрос в том, сколько воды содержит в этом моменте другой резервуар?

Математическое ожидание количества воды, которое является очевидно функцией от A_1 и A_2, обозначается через $M(A_1, A_2)$ (7). Пусть $F_n(x)$ вероятность того, что общее количество воды выпусканной в течении n отливок $< x$,

$$F_n(x) = \int_0^x F(x-z)\, dF_{n-1}(z),\; F_1(x) = F(x),\; F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Можно вычислить распределение оставшейся воды. Этот вопрос решается для случая n резервуаров.

Первая часть этого доклада дает решение дискретной проблемы. Общий случай содержит этот случай для

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}, \quad A = n.$$

SUR UN PROBLÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Par ANDRÁS PRÉKOPA (Debrecen)]

Le sujet de cette conférence est la résolution d'un problème du calcul des probabilités qui est la généralisation d'un problème proposé par M. *D. A. Darling* (Rutgers University) dans le v. 56 de »*The American Mathematical Monthly*« sous le numéro 4348.

Considérons deux récipients, contenant A_1 resp. A_2 quantité d'eau. De temps en temps, nous versons une certaine quantité d'eau de l'un des deux récipients. La probabilité qu'on verse de l'eau du premier récipient soit p et, de la même façon, la probabilité qu'on verse du deuxième, soit $q = 1 - p$. En continuant l'action de verser, il arrivera un moment où l'eau est épuisée dans l'un des deux récipients. On pose la question, quelle est la valeur probable de la quantité d'eau qui se trouve dans l'autre récipient à ce moment.

Supposons d'abord que $p = q = 1/2$, $A_1 = A_2 = A$, et, ensuite, que la fonction $F(x)$, donnant la probabilité que nous versions une quantité d'eau $< x$

à la fois du premier récipient, soit égal à $G(x)$, la probabilité analogue du deuxième récipient.

Désignons par $F_n(x)$ la probabilité qu'on verse d'un récipient par n versements une quantité totale d'eau $< x$, alors on obtiendra facilement que

$$F_n(x) = \int_0^x F(x-z)\, dF_{n-1}(z),$$

$$\text{où } F_1(x) = F(x), \quad F_0(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

La probabilité qu'un récipient soit vide après les n versements est égal à

$$F_{n-1}(A) - F_n(A).$$

La probabilité que le premier récipient soit vide après les n versements, ensuite que dans le deuxième récipient k versements se fassent jusque ce temps-là et la quantité d'eau qui reste soit v, pour laquelle on a $A - x - \Delta x \leqq v < A - x$, est égal à

$$\left(F_{n-1}(A) - F_n(A) \right) \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{2^{n+k}} \Delta F_k(x),$$

où

$$\Delta F_k(x) = F_k(x + \Delta x) - F_k(x).$$

Pour la valeur probable, on a l'expression (6), en tenant compte qu'il n'importe pas, quel récipient sera vide plus tôt, dans combien de versements il est devenu vide et combien de fois a-t-on versé du deuxième récipient jusque l'évacuation.

Au cas où $F(x) \not\equiv G(x)$, $p \neq q$, $A_1 \neq A_2$, on reçoit (7) pour la valeur probable, tandis que (8) est la fonction de distribution de l'eau restante.

Si on considère r récipients avec

les quantitiés d'eau	$A_1, \ A_2, \ldots, A_r$,	
les probabilités	$x_1, \ x_2, \ldots, x_r$	et
les fonctions de distribution	$F^{(1)}, \ F^{(2)}, \ldots, F^{(r)}$,	

alors on reçoit pour la somme des probabilités l'identité (9) exprimant qu'après un nombre de versements dans l'un des récipients l'eau se vide.

Le problème proposé par M. *D. A. Darling* correspond au cas particulier où $A_1 = A_2 = A$ est un nombre entier, $p = q = 1/2$ et

$$F(x) = G(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 1), \\ 1 & (x > 1). \end{cases}$$