

**Diogo Vieira Andrade**

**Um Modelo para  
Determinação de Preços para  
Leilões**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA  
Programa de Pós-graduação em  
Informática**

Rio de Janeiro  
Agosto de 2002

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Diogo Vieira Andrade**

**Um Modelo para Determinação de Preços  
para Leilões**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcus V. S. Poggi de Aragão

Rio de Janeiro  
Agosto de 2002



**Diogo Vieira Andrade**

## **Um Modelo para Determinação de Preços para Leilões**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcus V. S. Poggi de Aragão**

Orientador

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Marcelo Gattass**

PUC-Rio

**Prof. Oscar Porto**

PUC-Rio

**Prof. Marcus V. S. Poggi de Aragão**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de Agosto de 2002

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Diogo Vieira Andrade**

Ingressou no curso de Engenharia de Computação na PUC-Rio no início de 1995, formando-se ao final de 1999. No início de 2000 ingressou no mestrado em Informática, também pela PUC-Rio, com ajuda financeira da CAPES. Durante esses anos participou do Programa de Iniciação Científica financiado pelo CNPq em parceria com a PUC-Rio e colaborou como pesquisador no laboratório TeCGraf/PUC-Rio. Em 2002 foi aceito no programa de Ph.D. em Pesquisa Operacional pela Universidade de Rutgers, onde pretende dar continuidade à carreira acadêmica.

#### Ficha Catalográfica

Andrade, Diogo

Um Modelo para Determinação de Preços para Leilões/ Diogo Vieira Andrade; orientador: Marcus V. S. Poggi de Aragão. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Informática, 2002.

v., 70 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Informática — Teses. 2. Teoria dos Jogos. 3. Jogos de Programação Linear. 4. Leilão. I. Poggi, Marcus. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III. Título.

## Agradecimentos

Ao Professor Marcus Poggi, meu orientador, por todos os seus conselhos, colaborações e confiança demonstrada ao longo desses anos (inclusive anteriores à tese).

Ao Professor Marcelo Gattass e ao TeCGraf pela grande ajuda na minha formação como pesquisador e profissional.

Aos professores Oscar Porto e Carlos Lucena pela participação na banca examinadora.

À CAPES, pela ajuda financeira concedida ao longo do curso.

À PUC-Rio, pela ajuda financeira, pela formação e por todas as experiências vividas aqui ao longo de sete anos.

Aos meus amigos, por todo o apoio, em especial os que acompanharam de perto o processo: Diego, Sérgio, Danilo, Pedro e Mark.

À minha esposa, Letícia, por todo seu carinho, compreensão e paciência.

À minha família, por tudo que eu sou.

## Resumo

Andrade, Diogo; Poggi, Marcus. **Um Modelo para Determinação de Preços para Leilões**. Rio de Janeiro, 2002. 70p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação apresenta um modelo de programação linear para mercados virtuais, que tem como objetivo principal incentivar vendedores a oferecerem preços mais baixos e compradores a pagarem mais pelos produtos. Esse incentivo é feito através de compensações aos participantes do mercado que agirem desta forma.

O modelo funciona basicamente como um leilão bi-lateral, onde tanto vendedores quanto compradores podem dar seus lances. Para este modelo básico foram modeladas extensões como: existência de custo de transporte entre vendedores e compradores; economia de escala no preço do comprador; possibilidade de múltiplos produtos em um mesmo leilão.

Para o modelo básico e cada uma das extensões propostas foi elaborado o sistema de compensações baseados em princípios da Teoria dos Jogos. Em cada caso, foi verificada a existência de soluções de núcleo e como essas soluções determinam as características do mercado.

## Palavras-chave

Leilão; Programação Linear; Teoria dos Jogos; Solução de Núcleo.

## **Abstract**

Andrade, Diogo; Poggi, Marcus. **A Model for Determining Prices in Auctions**. Rio de Janeiro, 2002. 70p. MSc. Dissertation — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents a linear programming model for virtual markets. The main objective is to encourage sellers to offer lower prices and buyers to pay more for products. This is done through a system where the agents are awarded for acting this way.

The basic version of the model works as an auction where buyers and sellers can make their bids. Some extensions were developed for this basic model, to allow situations like: transportation cost between buyers and sellers; scale economy for the buyer's price; multiples products in the same auction.

For the basic model and each of its extensions, the system of awards has been developed based on Game Theory principles. In each case, the model was reinterpreted as a game and its core solutions were found. It was also verified how these solutions determine market's behavior.

## **Keywords**

Auction; Linear Programming; Game Theory; Core Solution.

## Conteúdo

1	Introdução	<b>1</b>
1.1	Leilões	2
1.2	Organização da Dissertação	4
2	O Modelo	<b>5</b>
2.1	Modelo Geral	5
2.2	Modelo Básico Linear	6
2.3	Extensões	7
2.4	Modelo Completo	10
2.5	Exemplos	11
3	Breve Introdução à Teoria dos Jogos	<b>15</b>
3.1	Jogos Não-Cooperativos	15
3.2	Jogos Cooperativos	19
4	Distribuição do Lucro	<b>22</b>
4.1	Jogo Associado ao Modelo	22
4.2	A Distribuição do Lucro	24
4.3	Análise de Resultados	27
4.4	Reinterpretação do Núcleo	34
5	Jogo com Extensões	<b>38</b>
5.1	Jogo com Custo de Transporte	38
5.2	Jogo com Economia de Escala	45
5.3	Jogo com Múltiplos Produtos	50
6	Escalabilidade	<b>60</b>
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	<b>67</b>

## Lista de Figuras

2.1	Economia de escala em 2 dimensões.	9
4.1	Preço Final e Lances dos Produtores	31
4.2	Preço Final e Capacidades Totais dos Produtores e Consumidores	33
6.1	Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 1.	62
6.2	Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 2.	63
6.3	Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 3.	64
6.4	Gráfico Tempo x Produtos para o TESTE 4.	65

## Lista de Tabelas

2.1	Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 1.	11
2.2	Dados de Entrada dos Consumidores para o EXEMPLO 1.	12
2.3	Matriz de compras e vendas dos participantes do EXEMPLO 1	12
2.4	Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 2.	13
2.5	Dados de Entrada dos Consumidores para o EXEMPLO 2.	13
2.6	Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.	13
2.7	Matriz de compra e venda entre os participantes do EXEMPLO 2.	14
3.1	Exemplo 1 - Batalha dos Sexos	18
3.2	Exemplo 2 - Dilema do prisioneiro	18
3.3	Exemplo 3 - Par ou Ímpar	19
4.1	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	28
4.2	Resultados para os produtores no teste 4.3.1.	29
4.3	Resultados para os consumidores no teste 4.3.1.	30
4.4	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	31
4.5	Resultados para os produtores no teste 4.3.2.	32
4.6	Resultados para os consumidores no teste 4.3.2.	32
4.7	Dinâmica dos Preços e das Capacidades	34
5.1	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	41
5.2	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	41
5.3	Matriz de compras e vendas dos participantes do mercado	42
5.4	Sumarização dos dados de produtores e consumidores.	42
5.5	Sumarização dos dados de produtores e consumidores.	43
5.6	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	44
5.7	Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.	44
5.8	Sumarização dos dados de produtores e consumidores.	44
5.9	Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.	48
5.10	Resultados para os produtores no JOGO 1.	49
5.11	Resultados para os consumidores no JOGO 1.	49
5.12	Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.	53
5.13	Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.	53
5.14	Resultados para os produtores no JOGO 1.	54
5.15	Resultados para os consumidores no JOGO 1.	54
5.16	Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.	56
5.17	Dados de Entrada dos Consumidores para o JOGO 1.	56
5.18	Resultado dos Produtores para o JOGO 1.	56
5.19	Resultado dos Consumidores para o JOGO 1.	57
5.20	Resultado dos Produtores para o JOGO 2.	58
5.21	Resultado dos Consumidores para o JOGO 2.	58
6.1	Resultado do TESTE 1.	62
6.2	Resultado do TESTE 2.	63
6.3	Resultado do TESTE 3.	64



# 1

## Introdução

Nos últimos anos tem havido grande aumento do comércio realizado pela Internet. Os motivos deste crescimento são vários: primeiramente, o número de usuários cresce de maneira espantosa a cada ano; outro fator é o ganho de confiabilidade que esta atividade vem conseguindo, seja pelo uso de novas tecnologias em segurança ou mesmo pelo amadurecimento da atividade; e a facilidade e comodidade proporcionadas por este tipo de comércio também contribuem para o crescimento desta atividade.

Uma das formas que vem ganhando cada vez mais espaço nesta modalidade de comércio são os leilões. Leilões oferecem uma série de vantagens, sobre o comércio “convencional”. A mercadoria pode ser obtida por preços menores, e o usuário tem a vantagem de estabelecer seu *lance* e poder aguardar por alguém com oferta compatível ou, se for o caso, ajustá-lo com o tempo.

Além disso, os leilões virtuais contam com uma grande variedade de produtos e marcas e podem atingir uma grande quantidade de agentes (sejam vendedores ou compradores) interagindo simultaneamente.

Estas possibilidades requerem duas características fundamentais do leilão: flexibilidade, para lidar com tipos e quantidades arbitrárias de mercadorias; e escalabilidade, para lidar com uma quantidade arbitrária de agentes interagindo num mesmo leilão simultaneamente de maneira eficiente.

Desta forma, o modelo elaborado deve cumprir com estes requisitos básicos e, ainda assim, apresentar algum diferencial em relação aos modelos existentes. O objetivo principal deste mercado, e o que pretende torná-lo diferente dos demais é um mecanismo de estimular os agentes *vendedores* a cobrarem *menos* pelos seus produtos e os agentes *compradores* a oferecerem *mais*. A própria natureza de um leilão já estimula este tipo de comportamento ao dar *prioridade* (seja na compra ou na venda, dependendo do enfoque do leilão) aos participantes que façam as melhores ofertas.

Porém é criado um mecanismo a mais para incentivar este comportamento. Um esquema de *compensações* é proposto beneficiando agentes vendedores que ofereçam suas mercadorias por um menor preço e agentes compradores que comprem por um preço maior.

Estas compensações devem ser modeladas de maneira a cumprirem seu objetivo primordial citado acima e ao mesmo tempo serem *justas*. O conceito de justiça neste caso significa que para todos os participantes do mercado valerá a pena *permanecer* no mercado. Portanto, o esquema de compensações criado deve ser atraente e *justo* para os participantes.

Para assegurar que esta característica exista são utilizados conceitos de Teoria de Jogos Cooperativos, para que se analise de uma maneira ordenada a dinâmica da interação dos *jogadores* (agentes) e que seja possível encontrar uma solução apropriada para este modelo de “distribuição de renda” proposto.

Por fim, são feitas análises de comportamento do mercado frente às possíveis alterações dos participantes. Com essas análises são encontrados padrões de comportamento para melhor entender o funcionamento do mercado proposto.

Neste capítulo é feita uma pequena introdução aos tipos mais conhecidos de leilões (sec. 1.1). Em seguida, na seção 1.2 é apresentada a organização dos capítulos para esta dissertação.

## 1.1 Leilões

Quando se pensa num leilão, a primeira associação feita é com aquele leilão clássico de um determinado objeto (normalmente alguma antiguidade), onde são feitos sucessivos lances, até que o detentor do último (e maior) lance arremata o objeto.

Esse tipo de leilão, também conhecido como *Leilão Inglês*, tem a característica de ter lances *abertos*, isto é, os outros compradores sabem dos lances a medida que eles são dados no leilão.

Outro tipo conhecido de leilão no formato aberto, porém com características bem distintas é o *Leilão Alemão*. Aqui, o leiloeiro inicia com um lance muito alto e vai diminuindo o valor do lance até que algum comprador leve o item pelo preço corrente.

Outra classe de leilões bastante difundida é a de *lance fechado*, onde cada comprador dá o seu lance uma vez sem conhecer os lances dos outros. Esse tipo pode ser mais vantajoso para o vendedor, dependendo da situação.

Entre os leilões de lance fechado mais conhecidos estão o *Leilão de Primeiro Preço* e o *Leilão Vickrey* [1] (ou *Leilão de Segundo Preço*). No primeiro, cada comprador dá o seu lance, sem conhecer o lance dos outros. Leva a mercadoria quem der o maior lance, pelo preço do maior lance. O segundo se diferencia apenas pelo fato do preço a ser pago ser o do segundo maior lance.

O Leilão é um tipo de mercado que já foi bastante analisado e existem diversos estudos sobre estratégia e comportamento de agentes em leilões. Milgrom [2] realizou alguns estudos nessa área e a seguir é mostrado um pequeno resumo a título de exemplo.

Para o *Leilão de Primeiro Preço* é visto que não há estratégia ótima a ser seguida, pelo fato dos agentes não terem uma informação precisa sobre os lances de seus oponentes. O vencedor normalmente pagará um preço maior do que o necessário para levar a mercadoria.

Este leilão é estrategicamente equivalente ao *Leilão Alemão*. Este leilão apesar de ter o formato aberto, os agentes também não têm como prever o comportamento dos outros participantes e não recebem qualquer informação até o momento da compra. Com isso, eles têm que determinar qual sua valoração máxima para a mercadoria e o quanto eles devem baixar essa valoração para minimizar os prejuízos de comprar por um preço acima do necessário.

Para o *Leilão Inglês* a estratégia para os agentes é ir aumentando seu lance de um valor mínimo  $\epsilon$  em relação ao último lance, até o ponto em que se alcança sua valoração para o item, e então pára. Para este leilão, os lances encerram quando se alcança a valoração do segundo maior participante.

Para o *Leilão Vickrey* a estratégia dominante é o agente fazer o lance com sua valoração real para o produto. Fazendo isto, ele estará aumentando suas chances de conseguir o produto, e ao ganhar, ele paga o mínimo possível para “vencer” o segundo concorrente: sua própria valoração. Nota-se neste leilão uma grande semelhança com o comportamento do *Leilão Inglês* no que diz respeito ao preço final esperado. Porém, neste leilão a decisão é tomada independente de qualquer ação dos outros concorrentes, enquanto que no *Leilão Inglês* um agente está recebendo constantemente informação sobre os outros participantes.

Estas foram apenas análises superficiais. Diversos fatores devem ser levados em conta na tomada de decisão em um leilão. Por exemplo, a mercadoria em questão tem valor bem determinado no mercado? Quanta informação se tem sobre os outros concorrentes e o quão segura é esta informação? O histórico de leilões desta mercadoria (se houver algum). Mais detalhes podem ser vistos em [2, 3].

## 1.2

### **Organização da Dissertação**

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 é apresentado o modelo do leilão. É onde são definidos seus parâmetros, suas regras e respostas. Primeiramente, um modelo básico é apresentado e em seguida são propostas algumas extensões para aumentar a flexibilidade deste modelo.

No capítulo 3 é feita uma breve introdução à Teoria de Jogos. Esta teoria permite analisar o modelo sob um outro ponto de vista e introduz alguns conceitos fundamentais a formulação das compensações a serem realizadas pelo leilão.

No capítulo 4 é apresentado o modelo básico com o enfoque de Teoria dos Jogos. É visto também como são feitas as compensações e são feitas algumas análises sobre o comportamento do leilão dadas as compensações propostas.

O capítulo 5 apresenta estrutura semelhante ao 4, porém as análises são feitas sobre cada extensão proposta no capítulo 2.

O capítulo 6 apresenta alguns experimentos para testar a escalabilidade do modelo, isto é, é testado seu comportamento para instâncias de maior porte.

No capítulo 7 são feitas as considerações finais, as conclusões são sumarizadas e são levantadas hipóteses de trabalhos futuros.

## 2

### O Modelo

Neste capítulo é apresentado o modelo de mercado proposto na dissertação. Apesar de simples, esse modelo pode ser aplicado em diversas situações, como será mostrado ao longo da dissertação. O modelo desenvolvido apresenta uma versão básica, mais simples e algumas extensões para reproduzir algumas situações existentes em mercados reais.

O modelo elaborado, por sua simplicidade, pode ser considerado um modelo de leilão, que tem como regra básica *priorizar* compradores que ofereçam os preços mais altos ou, visto pelo lado do vendedor, aquele que oferecer seu produto pelo menor preço tem a prioridade.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2.1 é apresentado o modelo geral do leilão proposto nesta dissertação. Na seção 2.2 é apresentada uma versão *linear* para o leilão, isto é, todas as regras do modelo serão representadas por funções lineares. Na seção 2.3 são mostradas as extensões feitas ao modelo básico. Na seção 2.5 são mostrados alguns exemplos numéricos para o mercado proposto.

#### 2.1

##### Modelo Geral

O modelo geral proposto nesta dissertação é um leilão “bi-lateral”, onde compradores e vendedores dão seus lances. Para um comprador, o lance significa o preço máximo de compra. Para o vendedor, este lance representa o preço mínimo de venda.

Neste modelo geral, convencionou-se que pode ser vendida uma quantidade arbitrária de um (e só um) tipo de mercadoria. A quantidade a ser vendida, depende das capacidades de compra por parte dos consumidores, e de produção (ou estoque) por parte dos produtores. Essas capacidades são pré-definidas por cada participante como entrada do leilão.

O objetivo básico desse mercado é maximizar uma determinada função de *lucro*  $\mathcal{L}$  que será função dos preços e quantidades compradas e vendidas pelos participantes do mercado.

Formalizado o leilão tem-se: um conjunto  $P$  com  $n$  produtores, dois vetores  $p$  e  $c$  de dimensão  $n$ , contendo a quantidade oferecida por cada produtor e o preço cobrado por unidade do produto. Um conjunto  $Q$  com  $m$  consumidores, dois vetores  $q$  e  $l$  de dimensão  $m$  com as demandas e preços oferecidos pelos consumidores. E um conjunto  $\mathcal{R}$  de regras a serem seguidas no leilão.

No restante do texto serão convencionado os termos *produtores* e *consumidores* para os vendedores e compradores do leilão. Naturalmente, o mercado não se restringe a vendedores que efetivamente produzam suas mercadorias. Esta terminologia será utilizada apenas por motivos de simplificação.

Expressando matematicamente, tem-se:

$$\text{Max } \mathcal{L}(p, c, q, l)$$

Sujeito a:

$$\mathcal{R}(p, c, q, l)$$

## 2.2

### Modelo Básico Linear

Uma escolha lógica para a função de *lucro* é que ela seja a diferença entre o que foi gasto pelos consumidores, pelo que foi ganho pelos produtores. Além de ser a escolha mais natural, ela ainda apresenta a característica de ser uma função linear. Isto é importante pois permite o uso de resolvidores de programação linear para encontrar soluções para instâncias do modelo.

A única regra a ser imposta nesse modelo básico, é a da limitação das compras e vendas de cada participante não poder exceder suas capacidades previamente declaradas (representadas pelos vetores  $p$  e  $q$ ).

Algumas variáveis foram introduzidas ao modelo para que se pudesse expressar a função do lucro e as regras. Estas são:

$x_{ij}$  Elemento da matriz  $X$  de dimensão  $n \times m$ . Representa a quantidade vendida do produtor  $i$  para o consumidor  $j$ .

$\gamma_i$  Elemento do vetor  $\gamma$  de dimensão  $n$ . Representa o ganho total do produtor  $i$ .

$\psi_j$  Elemento do vetor  $\psi$  de dimensão  $m$ . Representa o gasto total do consumidor  $j$ .

Com essas variáveis, o modelo pode ser escrito como se segue:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^m \psi_j - \sum_{i=1}^n \gamma_i \quad (2-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2-2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq q_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2-3)$$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^m c_i x_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (2-4)$$

$$\psi_j = \sum_{i=1}^n l_j x_{ij} \quad j = 1, \dots, m \quad (2-5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \quad (2-6)$$

A equação (2-1) é a função objetivo do modelo. Conforme dito anteriormente, ela visa maximizar o *lucro* gerado por este mercado.

A inequação (2-2) restringe as vendas de cada produtor  $i$  a sua respectiva capacidade de produção  $p_i$ , e a inequação (2-3) restringe as compras de cada consumidor  $j$  a sua capacidade de consumo  $q_j$ .

As equações (2-4) e (2-5) apenas atribuem às variáveis  $\gamma_i$  e  $\psi_j$  seus valores corretos.  $\gamma_i$  é calculado com base nos preços  $c_i$  estipulados por cada produtor  $i$ , e  $\psi_j$  é calculado com base nos preços  $l_j$  estipulados por cada consumidor  $j$ .

### 2.3 Extensões

Esta seção é dedicada às extensões feitas ao modelo básico. O objetivo dessas extensões é de adicionar ao modelo algumas características que existam em mercados reais. Posteriormente, será mostrado que mesmo com essas extensões, as propriedades fundamentais do modelo permanecem.

Esta seção está dividida da seguinte forma. Na seção 2.3.1 é adicionado o custo de transporte ao modelo. Na seção 2.3.2 é adicionada a economia de escala no preço oferecido pelo consumidor. Na seção 2.3.3 é apresentado o modelo para múltiplos produtos.

### 2.3.1

#### Custo de Transporte

O custo de transporte associado a mercadoria é na verdade qualquer custo associado a venda de um produto. Pode ser o custo de transportar a mercadoria, ou pode ser algum imposto sobre o produto. Considera-se neste modelo, o custo de transporte como uma função linear com a quantidade vendida.

Para adicionar o custo de transporte ao modelo, basta definir a matriz  $T$   $n \times m$ , onde  $t_{ij}$  define o custo de transportar uma unidade do produto do produtor  $i$  para o consumidor  $j$ .

O custo de transporte pode ser adicionado no modelo diretamente na função objetivo.

$$\text{Max} \sum_{j=1}^m \psi_j - \sum_{i=1}^n \gamma_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{ij} x_{ij} \quad (2-7)$$

A inserção do custo de transporte muda ligeiramente as características do leilão definidas na seção 2.2<sup>1</sup>. Nem sempre o consumidor com maior oferta, ou o produtor com menores preços serão escolhidos. O custo do transporte, se não for desprezível frente ao preço da mercadoria, pode representar um importante diferencial na determinação de quem entra no mercado.

### 2.3.2

#### Economia de Escala

A economia de escala no consumidor permite que cada consumidor defina seus preços de acordo com faixas de quantias compradas. Essa prática é muito comum quando se compra mercadorias em grandes quantidades. Quanto maior a quantidade, menor o preço o oferecido.

Para adicionar a economia de escala, é necessário que cada consumidor  $j$  defina um vetor  $b^j$  de dimensão  $\beta_j$ , onde  $\beta_j$  é o número de *pontos de quebra*

---

<sup>1</sup>O modelo da seção 2.2 é um caso especial em que o custo de transporte é zero entre os participantes do mercado.

na função. Os  $\beta_j$  pontos de quebra definem  $\beta_j + 1$  faixas de preço. Os preços para cada faixa são definidos nos vetores  $l^j$ .

Com isso, as restrições 2-5, que definem as quantidades gastas por cada consumidor, devem ser modificadas para suportar diferentes preços para diferentes quantias. Neste caso, uma simples linearização por partes resolve o problema para este modelo, visto que sempre se desejará o maior preço possível.

$$\psi_j \leq \sum_{i=1}^n l_j^a x_{ij} + \delta_j^a \quad a = 1, \dots, \beta_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2-8)$$

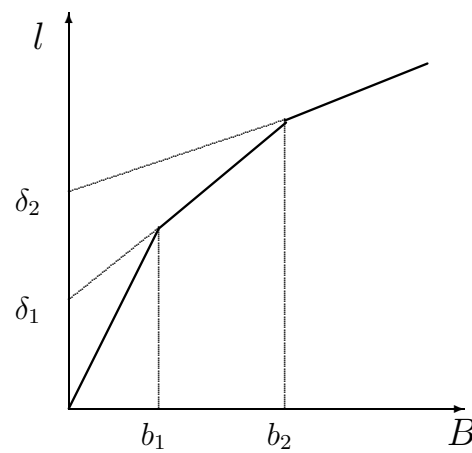


Figura 2.1: Economia de escala em 2 dimensões.

A figura 2.1 ilustra em 2 dimensões a composição de retas para expressar a função da economia de escala para um dos consumidores. Neste exemplo com dois *pontos de quebra* estabelecidos ( $b_1$  e  $b_2$ ), são estabelecidas três faixas de preço (os coeficientes  $l_j^1$ ,  $l_j^2$  e  $l_j^3$ ). Os valores de  $\delta_j^a$  são os coeficientes lineares destas retas e são calculados da seguinte maneira:

$$\left. \begin{aligned} \delta_j &= 0 & j &= 1 \\ \delta_j &= (l_j - l_{j-1}) \sum_{k=1}^i b_k & j &= 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

### 2.3.3 Múltiplos Produtos

Este modelo permite considerar um leilão com múltiplos produtos. As vantagens de ter se ter essa possibilidade são óbvias. A maior delas é a flexibilização do mercado.

Na prática, um leilão com múltiplos produtos pode ser considerado como múltiplos leilões de um produto, salvo pelas chamadas *restrições de acoplamento* que possam vir a existir no leilão. Estas são restrições que envolvam mais de um tipo de produto. Alguns exemplos deste tipo de restrição são: restrições orçamentárias para os consumidores, ou restrições de matéria prima no caso dos produtores.

Num leilão de  $\rho$  produtos, cada produtor  $i$  deverá definir um vetor  $p_i$  de dimensão  $\rho$ , contendo as  $k$  capacidades de produção. Deste modo, o vetor  $p$  que definia as capacidades, passa a ser uma matriz  $P$ , onde o elemento  $p_i^k$  é o preço do produtor  $i$  para o produto  $k$ .

Mudanças análogas devem ser feitas ao vetor de preços do produtor, as demandas e preços dos consumidores e aos custos de transporte.

A equação abaixo mostra a generalização da restrição de capacidade de produção para o modelo com múltiplos produtos:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^k \leq p_i^k \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, \rho \quad (2-10)$$

Como exemplo de restrição de acoplamento, suponha que o consumidor  $j$  tenha um limite total de gasto  $\theta_j$ . Nitidamente, essa restrição irá agir sobre todos os produtos, uma vez que os gastos com certos produtos, influenciam na compra de outros.

Segue a equação desta restrição:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k \leq \theta_j \quad j = 1, \dots, m \quad (2-11)$$

## 2.4 Modelo Completo

Esta seção contém apenas a formulação completa do modelo, juntando todas as extensões. Segue o modelo:

$$Max \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\rho} \gamma_i^k - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\rho} t_{ij}^k x_{ij}^k$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_{ij}^k &\leq p_i^k & i = 1, \dots, n & \quad k = 1, \dots, \rho \\ \sum_{i=1}^n x_{ij}^k &\leq q_j^k & j = 1, \dots, m & \quad k = 1, \dots, \rho \\ \gamma_i^k &= \sum_{j=1}^m c_i^k x_{ij}^k & i = 1, \dots, n & \quad k = 1, \dots, \rho \\ \psi_j^k &\leq \sum_{i=1}^n l_j^{ak} x_{ij}^k + \delta_j^{ak} & j = 1, \dots, m & \quad k = 1, \dots, \rho \quad a = 1, \dots, \beta_j \\ \mathcal{A}(x, \gamma, \psi) & & & \\ x_{ij}^k &\geq 0 & i = 1, \dots, n & \quad j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, \rho \end{aligned}$$

Onde,  $\mathcal{A}(x, \gamma, \psi)$  representam o conjunto de restrições de acoplamento.

## 2.5 Exemplos

Esta seção contém dois exemplos de como o modelo efetua a compra e venda de produtos entre os participantes do leilão. É visto como produtores que oferecem seus produtos por um preço menor são priorizados na venda, bem como consumidores que ofereçam maiores preços.

EXEMPLO 1: Neste exemplo é resolvida uma instância do modelo básico, sem as extensões. Segue a entrada de dados para este modelo.

Produtores		
Id	Oferta	Lance
A	125	375
B	100	380
C	150	385
D	100	395

Tabela 2.1: Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 1.

A Tabela 2.1 contém os dados de entrada dos produtores. As colunas determinam os parâmetros do problema e os dados de cada produtor está

nas linhas. A coluna *Oferta* representa a capacidade máxima de produção e a coluna *Lance* representa o preço do produto.

Consumidores		
Id	Demanda	Lance
W	140	405
X	150	400
Y	120	385
Z	100	390

Tabela 2.2: Dados de Entrada dos Consumidores para o EXEMPLO 1.

A Tabela 2.2 contém os dados de entrada dos consumidores e tem organização semelhante à anterior. A coluna *Demanda* representa a capacidade máxima de consumo. A coluna *Lance* representa o preço oferecido pelo produto.

Compra e Venda				
Produtores	Consumidores			
	W	X	Y	Z
A	125	0	0	0
B	15	85	0	0
C	0	65	0	85
D	0	0	0	0

Tabela 2.3: Matriz de compras e vendas dos participantes do EXEMPLO 1

A Tabela 2.3 apresenta os resultados para este exemplo em forma de uma matriz de compras e vendas. Nas linhas estão as quantias vendidas pelos produtores e nas colunas as quantidades compradas pelos consumidores.

O valor da função objetivo para este problema foi de 7225. Sobre este exemplo, é importante ressaltar o princípio básico deste modelo que é o de *maximização do lucro*. Olhando para os dados de entrada, pode-se facilmente organizar uma distribuição em que aumente as vendas do mercado, porém este não é o objetivo primordial do mercado.

Este comportamento é um dos fatores que estimula produtores a cobrarem menos e consumidores a pagarem mais. Pois com este comportamento, eles estarão aumentando suas respectivas chances de participar do mercado.

**EXEMPLO 2:** Neste exemplo é resolvida uma instância do modelo com todas as suas extensões. Segue a entrada de dados para este modelo.

A Tabela 2.4 contém os dados de entrada para os produtores. Esta tabela segue o padrão do exemplo anterior, porém com dois produtos no mercado.

Produtores				
Id	Produto 1		Produto 2	
	Oferta	Lance	Oferta	Lance
A	125	40	500	100
B	100	42	400	98
C	150	41	420	103

Tabela 2.4: Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 2.

Consumidores									
Id	Produto 1		Produto 2						
	Demanda	Lance	Demanda	Faixas de Preço			Lance		
Y	160	45	600	50	100	500	121	115	105
Z	150	42	700	100	700	-	120	105	-

Tabela 2.5: Dados de Entrada dos Consumidores para o EXEMPLO 2.

A Tabela 2.5 contém os dados de entrada dos consumidores. Além da mudança de conter 2 produtos, para o produto 2 os consumidores utilizam economia de escala nos preços. Com isso, são definidas as faixas de preço e os preços correspondentes para essas faixas. Por exemplo, o consumidor **Y** compra os primeiros 50 produtos a 121, pelos 100 seguintes ele paga 115 e para o restante paga 105.

Coeficientes de Transporte					
Produto 1			Produto 2		
Produtores	Consumidores		Produtores	Consumidores	
	X	Y		X	Y
A	5	6	A	2	2
B	9	3	B	3	1
C	8	10	C	1	1

Tabela 2.6: Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.

A Tabela 2.6 apresenta as matrizes dos custos de transporte. As linhas contêm os dados por produtor e nas colunas estão os dados por consumidor. Uma entrada  $(i, j)$  é o custo unitário de transporte do produtor  $i$  para o consumidor  $j$ .

A Tabela 2.7 mostra os resultados desse jogo. A organização desta tabela é semelhante a do jogo anterior, porém com informação para dois produtos. O valor da função objetivo é de 9860. O modelo se comporta exatamente como dois modelos dissociados, um para cada produto. O valor da função objetivo para o problema com apenas o produto 1 é de 2260, e apenas com o produto 2 é de 7600 (totalizando os 9860).

Compra e Venda					
Produto 1			Produto 2		
Produtores	Consumidores		Produtores	Consumidores	
	X	Y		X	Y
A	75	50	A	200	300
B	0	100	B	0	400
C	85	0	C	400	0

Tabela 2.7: Matriz de compra e venda entre os participantes do EXEMPLO 2.

Além disso, é possível ver que o custo de transporte pode ter grande influência no mercado, dependendo de sua relevância em relação ao preço da mercadoria e da diferença entre os pares (*produtor, consumidor*). Por exemplo, o produtor **C** mesmo oferecendo preço menor em relação a **B** não conseguiu vender seu total, pois suas altas taxas de transporte o prejudicaram.

As análises feitas nesses exemplos são superficiais e servem apenas para apresentar instâncias do modelo e suas soluções. Análises mais aprofundadas são feitas mais a frente, nos capítulos 4 e 5, quando é apresentada também a divisão do lucro para o modelo básico e suas extensões.

## 3

### Breve Introdução à Teoria dos Jogos

Teoria dos Jogos é uma ferramenta matemática criada para melhor entender ou interpretar a maneira com que agentes que tomam decisões interagem entre si. Pense num *jogo* como uma cenário onde os *jogadores* interagem. Esses jogadores têm um conjunto de *decisões* (ou *ações*) passíveis de serem tomadas. As tomada de decisão é baseada nas preferências de cada jogador e na sua expectativa sobre as ações dos outros jogadores. É justamente nessa dinâmica que a Teoria dos Jogos foca seu estudo.

Dentre as diversas classificações existentes para jogos, neste capítulo são focadas brevemente duas: Jogos *Cooperativos* e *Não-Cooperativos*. A diferença entre estes dois tipos de jogo está no enfoque sobre o jogador. Em jogos não-cooperativos, o conjunto de ações possíveis está associado a jogadores *individuais*. Em jogos cooperativos, o conjunto de ações possíveis está associado a grupos de jogadores (ou *coalizões*).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 3.1 é feita uma introdução ao conceito de jogos não-cooperativos, com definições dos conceitos mais importantes e alguns exemplos simples. Na seção 3.2 é introduzida a classe de jogos cooperativos.

#### 3.1

##### Jogos Não-Cooperativos

Nesta seção é feita uma breve introdução sobre Jogos Não-Cooperativos. Esta classe de jogos está dividida em 2 tipos:

- Jogos Estratégicos: modela situações em que os jogadores escolhem seu plano de ação apenas uma vez, e as decisões são tomadas simultaneamente (isto é, quando um jogador escolhe seu plano de ação ele não é informado sobre os planos dos outros).

- Jogos Extensivos: modela situações em que ocorrem uma seqüência de eventos e os jogadores tem que tomar as decisões não só no início, mas durante o jogo, em qualquer momento que for requerido uma ação.

Vale ressaltar que a teoria dos jogos considera o fato de os jogadores serem *racionais*. Um jogador é tido como racional baseado na maneira como ele toma suas decisões. Ele está ciente de suas possíveis ações, forma expectativas sobre as indefinições do problema, tem suas preferências bem claras e toma sua decisão após algum processo de *otimização*. Isto é, dentro de suas possibilidades e expectativas sobre o cenário, ele tomará a decisão que ele julgue que mais o beneficiará.

### 3.1.1 Jogos Estratégicos

Nesta seção considera-se somente os jogos estratégicos, pois os conceitos introduzidos neles são mais simples e, ao mesmo tempo, suficientes para ilustrar a idéia.

**Definição 3.1 (Jogos Estratégicos)** *Um jogo estratégico consiste de:*

- um conjunto finito  $N$  (o conjunto de jogadores).
- para cada jogador  $i \in N$  um conjunto não vazio  $A_i$  (o conjunto de ações possíveis para o jogador  $i$ ).
- para cada jogador  $i \in N$  uma relação de preferência  $\succeq_i$  sobre o conjunto  $A_i$ .

Desta forma, um jogo estratégico pode ser visto como um modelo de um evento que só ocorre uma vez. Cada jogador sabe os detalhes do jogo e o fato dos outros jogadores serem *racionais*. As decisões são tomadas de forma independente e simultânea<sup>1</sup>. Sob esse ponto de vista, um jogador não está ciente das decisões dos outros ao tomar a sua decisão. No máximo, ele pode formar expectativas baseadas nas informações gerais do jogo.

---

<sup>1</sup>Quando se diz simultânea, não quer dizer necessariamente que eles tomem a decisão exatamente ao mesmo tempo. Os jogadores podem ter, por exemplo, um prazo para submeter sua decisão.

### 3.1.2 Equilíbrio de Nash

O conceito do **Equilíbrio de Nash** é um dos mais conhecidos e usados para analisar soluções em jogos. Essa noção captura um *estado estacionário* para o jogo estratégico, onde cada jogador tem a expectativa correta sobre o comportamento dos outros jogadores, e age racionalmente.

**Definição 3.2 (Equilíbrio de Nash)** *Dado um jogo estratégico  $\langle N, (A_i), (\succeq_i) \rangle$ , o equilíbrio de Nash é a escolha  $a^* \in A$ , com a seguinte propriedade:*

$$(a_{-i}^*, a_i^*) \succeq (a_{-i}^*, a_i) \quad \forall a_i \in A_i \text{ e } \forall i \in N.$$

Então, para que  $a^*$  seja um equilíbrio de Nash, não pode haver um jogador  $i$  que faça uma escolha diferente de  $a_i^*$  e obtenha um resultado melhor do que se escolhesse  $a_i^*$ , considerando que os demais jogadores  $j$  escolheram  $a_j^*$ . Em suma, nenhum jogador pode obter um ganho maior desviando dessa solução, dadas as ações dos outros jogadores.

Mais detalhes sobre Teoria dos Jogos podem ser vistos em livros sobre o assunto como o de Osborne e Rubinstein [4] ou o do Curiel [5].

### 3.1.3 Exemplos

Nessa seção são apresentados alguns exemplos clássicos de jogos estratégicos. São exemplos bem simples, com dois jogadores e duas ações, onde serão analisados os equilíbrios de Nash em diferentes situações.

1. *Batalha dos Sexos*: Este jogo consiste de dois jogadores, um homem **H** e uma mulher **M** que combinaram de saírem juntos. O principal interesse deles é de se encontrar no mesmo lugar, mas o homem prefere ir ao lugar **A**, enquanto a mulher gostaria que eles fossem em **B**.

A Tabela 3.1 representa as preferências dos jogadores através de uma *função custo benefício*. Nesta tabela, as linhas representam as ações possíveis para o jogador 1 (**H**, no caso) e as colunas são as ações do jogador 2 (**M**). Uma entrada  $(A_1, A_2)$  na tabela contém 2 números  $(w_1, w_2)$ , onde cada um é a atribuição de valor de cada jogador dadas as ações  $A_1$  e  $A_2$  tomadas.

Este exemplo modela uma situação onde os jogadores querem chegar num consenso, mas têm interesses conflitantes. O jogo tem 2 equilíbrios de Nash:  $(A, A)$  e  $(B, B)$ . Isto é, quando os dois escolhem o mesmo lugar para sair.

2. *Dilema do Prisioneiro*: Dois suspeitos de um crime são postos em celas separadas para serem interrogados. Se ambos confessarem o crime, cada um será sentenciado a 3 anos de prisão. Se apenas um deles confessar, ele será liberado e usado de testemunha contra o outro, que receberá uma punição de 4 anos. Se nenhum deles confessar, cada um pega uma sentença mais leve, de 1 ano. A Tabela 3.2 apresenta este jogo:

Neste jogo, um comportamento interessante pode ser notado. Se os prisioneiros cooperarem entre si, isto é, nenhum deles confessar, o ganho conjunto é o melhor de todos (a soma das penas dá 2 anos). Porém, o equilíbrio aponta para o outro lado. Se cada um agir em causa própria, qualquer que seja a ação do outro, a melhor alternativa é confessar. Portanto, o equilíbrio de Nash neste caso é ambos confessarem o crime.

3. *Par ou Ímpar*: Dois jogadores estão jogando “par ou ímpar”. O jogador que perder terá que pagar ao outro um real. No jogo, cada jogador pode optar por colocar um número par ou ímpar. O jogador que escolhe par ganha quando os números forem 2 pares ou 2 ímpares. O outro ganha quando os números forem um par e um ímpar. Cada jogador só se preocupa com a quantidade de dinheiro que está ganhando. O jogo é mostrado na Tabela 3.3.

Jogos deste tipo, onde os interesses dos jogadores são totalmente opostos, são chamados de *estritamente competitivos*. Tais jogos não possuem equilíbrio de Nash.

	A	B
A	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

Tabela 3.1: Exemplo 1 - Batalha dos Sexos

	Confessar	Não Confessar
Confessar	3, 3	0, 4
Não Confessar	4, 0	1, 1

Tabela 3.2: Exemplo 2 - Dilema do prisioneiro

## 3.2

### Jogos Cooperativos

O conceito de Jogos Cooperativos se deve em grande parte ao trabalho de von Neumann e Morgenstern, em 1944 [6].

A melhor maneira de introduzir este conceito é dando um exemplo de como este problema pode ocorrer em situações corriqueiras.

Suponha um cenário onde 4 empresas: A, B, C e D resolvem unir seu capital e força de trabalho para um investimento conjunto. De acordo com suas estimativas, eles conseguirão um lucro de 100 unidades. Ocorre então, o problema de se dividir esse lucro entre os participantes da sociedade. Uma primeira abordagem, que parece justa é dividir o lucro igualmente entre os quatro participantes, 25 unidades para cada um.

Porém, os participantes A e B descobrem que se eles se unirem conseguiriam arrecadar 55, mais do que os 50 que os dois conseguiriam se estiverem na sociedade com C e D. Por outro lado, C e D analisam o mercado e descobrem que juntos eles só conseguiriam lucro de 30 unidades. Sendo, dessa maneira, vantajoso para eles manterem A e B na sociedade. Desta forma, eles se vêm obrigados a abrir mão de seu lucro inicial e ceder para A e B 56 unidades, ficando com 44 para eles.

Em outra análise, descobre-se que A, B e D juntos conseguiriam 80 unidades. Mais do que os  $78^2$  da divisão anterior. E o participante C analisa sua situação e vê que sozinho, ele não conseguiria lucro algum. C, então, se propõe a ficar com 19 unidades e ceder as 81 restantes a A, B e D.

E as alianças não parariam por aí, ainda restariam muitas coalizões a serem avaliadas e, sem avaliar a dinâmica dessas alianças de uma maneira organizada, a complicação para dividir esses lucros seria muito grande.

A Teoria de Jogos Cooperativos apresenta maneiras sistemáticas de avaliar a situação e chegar a soluções ótimas (ou comprovar que não há solução ótima).

Nesta dissertação, o enfoque escolhido para analisar o mercado apresentado no capítulo anterior foi o de jogos cooperativos, por alguns conceitos

---

<sup>2</sup>Divisão anterior com A e B =  $56 + C = 22$ .

	Par	Ímpar
Par	1, -1	-1, 1
Ímpar	-1, 1	1, -1

Tabela 3.3: Exemplo 3 - Par ou Ímpar

sobre a *solução* do jogo (especialmente o conceito de *núcleo*) que são apresentados posteriormente neste capítulo.

### 3.2.1

#### Notações e Definições

Nesta seção um jogo será formalizado matematicamente. Em seguida, são apresentados alguns conceitos importantes sobre os jogos.

**Definição 3.3 (Jogo Cooperativo)** *É definido por um par  $\langle N, v \rangle$ , onde  $N$  é o conjunto finito de jogadores e  $v$  é a função característica, ou função de valoração, definida sobre  $2^N$  <sup>3</sup> com valores em  $\mathbb{R}$  e onde  $v(\emptyset) = 0$ .*

Um subconjunto  $S$  de  $N$  é chamado de coalizão. O número  $v(S)$  é a valoração da coalizão  $S$ . O vetor de pagamentos  $x \in \mathbb{R}^n$  representa uma divisão do lucro de  $v(N)$ .  $x_i$  é o lucro atribuído ao jogador  $i \in N$ . O valor de  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ .

Para ilustrar melhor, no exemplo da seção anterior, o conjunto  $N = \{A, B, C, D\}$  e valores da função  $v$  foram citados para alguns casos, por exemplo:

$$v(\{A, B, C, D\}) = 100, v(\{A, B\}) = 55, v(\{C, D\}) = 30, \text{ etc.}$$

Para o vetor de pagamentos inicialmente foi considerado:

$$x = \{25, 25, 25, 25\}, \text{ depois tentou-se } x = \{28, 28, 22, 22\}, \text{ etc.}$$

Jogos Cooperativos contém uma série de definições e conceitos para classificação dos jogos, dependendo das características da função de valoração  $v$ . O conceito mais importante para o enfoque dessa dissertação é o conceito do *núcleo* do jogo  $C(v)$ .

Como visto no exemplo da introdução, quando os participantes do jogo decidiram se juntar para cooperar em um certo negócio, o problema que apareceu foi de como dividir o lucro. Se um ou mais jogadores perceberem que uma certa divisão proposta lhes é desvantajosa, eles podem decidir deixar a colisão.

**Definição 3.4 (Núcleo do Jogo)** *É um conjunto de soluções (isto é, divisões do lucro), onde nunca é vantajoso para quaisquer participantes do conjunto sair do grupo e formar coalizões próprias. Formalizando:*

$$C(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \quad \forall S \in 2^N\} \quad (3-1)$$

---

<sup>3</sup> $2^N$  é conjunto de todos os subconjuntos de  $N$ .

Então, dada esta classe de soluções do núcleo, que contém esta propriedade especial, as soluções encontradas para o mercado procurarão ter essa característica<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Se for possível, já que o *núcleo* pode ser vazio.

## 4

### Distribuição do Lucro

Conforme dito na Introdução, o principal atrativo deste modelo está em recompensar produtores que ofereçam seus produtos por um preço mais baixo, e consumidores que paguem mais. Esta compensação é feita através da distribuição do montante gerado pelo *lucro* do sistema (eq. 2-1).

Neste capítulo é apresentado como é feita essa distribuição. É mostrado que a distribuição pode ser feita de maneira a não só cumprir com os objetivos primordiais do mercado, mas também ter a propriedade de ser vantajosa para todos os participantes do mercado.

Em outras palavras, enxergando este mercado como um jogo cooperativo, espera-se que a solução desse jogo (isto é, a distribuição do lucro gerada pelo sistema) pertença ao *núcleo*.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1 é mostrado o jogo cooperativo criado a partir do modelo básico. Na seção 4.2 é apresentada a distribuição do lucro para este modelo, em particular é mostrado como se chega em uma solução que pertença ao *núcleo* do jogo. Na seção 4.3 é feita uma análise da distribuição proposta a partir de exemplos. E na seção 4.4 é chegada a solução de *núcleo* de uma outra maneira, sendo possível chegar a algumas conclusões sobre a forma desta solução.

#### 4.1

##### Jogo Associado ao Modelo

O modelo apresentado no capítulo 2, pode ser representado como um jogo competitivo. Nesta seção são mostrados os diferentes tipos de jogos que podem ser derivados do modelo básico.

Para definir um jogo, conforme visto na seção 3.2.1, é necessário um conjunto de jogadores  $N$  e uma função de valoração  $v$  que atribui um valor para cada coalizão formada.

Pode-se definir o jogo da seguinte forma:

- Conjunto  $N$  de jogadores formado pela união do conjunto  $P$  de produtores e o conjunto  $Q$  de consumidores.
- Função de valoração  $v$  é o *lucro* de cada coalizão  $S \subset N$ . O *lucro* é justamente o valor maximizado na função objetivo do modelo (eq 2-1). Naturalmente,  $v$  será igual a 0 quando não houver nenhum produtor ou nenhum consumidor na coalizão formada.

O modelo apresentado na seção 2.2 pode ser rerepresentado com pequenas mudanças para se adequar à formulação de jogo competitivo.

$$\mathcal{L}(S) : \text{Max} \sum_{j \in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i \quad (4-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij} \leq p_i \quad i \in P_S \quad (4-2)$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij} \leq q_j \quad j \in Q_S \quad (4-3)$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i x_{ij} \quad i \in P_S \quad (4-4)$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j x_{ij} \quad j \in Q_S \quad (4-5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in P_S \quad j \in Q_S \quad (4-6)$$

A função objetivo é denominada por  $\mathcal{L}(S)$ , que é o lucro do sistema para uma dada coalizão  $S \subset N$ .

Os conjuntos  $P_S$  e  $Q_S$  são equivalentes a  $P \cap S$  e  $Q \cap S$  respectivamente.

Existem outras possibilidades de jogo, que não são tratadas neste trabalho, mas vale a pena serem mencionadas.

Pode-se que considerar apenas os consumidores compõem o conjunto de jogadores. Este jogo seria adequado para modelar situações onde existe apenas um vendedor com seus produtos e uma quantidade arbitrária de compradores (situação mais usual em leilões).

O contrário também é válido, isto é, o conjunto de jogadores ser formado apenas pelos produtores. Isto ocorre por exemplo no comércio de energia elétrica, onde os consumidores formam uma única demanda de energia e os fornecedores competem pela venda de energia nas faixas de horários.

Na seção 2.3, onde são apresentadas as extensões do modelo, foi visto um modelo de jogo com custos de transporte. Se houver mais de um agente

transportador, pode-se adicionar ao conjunto de jogadores os agentes de transporte.

## 4.2

### A Distribuição do Lucro

Nesta seção é proposta uma maneira de realizar a distribuição do *lucro* do sistema. Essa distribuição, como já foi dito, deve pertencer ao núcleo e cumprir com os objetivos primordiais do mercado. O foco desta seção é descrever uma maneira sistemática de se chegar à uma solução de núcleo para o jogo, se ele a tiver.

Para se chegar a esta maneira sistemática será necessário apresentar o *problema dual* associado ao jogo. Através da solução do problema dual será deduzida uma solução de núcleo.

Na seção 4.2.1 é mostrado o problema dual. Na seção 4.2.2 é proposta a divisão do *lucro* associada ao dual e é provado que esta solução pertence ao núcleo do jogo.

#### 4.2.1

##### Problema Dual

Dualidade se refere a pares de problemas e seus relacionamentos. Um exemplo de problemas duais pode ser observado ao se considerar um círculo no plano e um ponto no seu exterior. O problema *primal* seria o de encontrar o ponto no interior do círculo que minimiza a distância para o ponto no exterior. O problema *dual* poderia ser o de encontrar a reta que passa em um ponto dado e o círculo que maximiza sua distância ao ponto. No caso destes problemas, dois relacionamentos desejáveis entre problemas duais estão presentes:

- I qualquer ponto no interior do círculo está a uma distância superior ou igual à distância de qualquer reta que passa entre o ponto exterior e o círculo.
- II a distância do ponto no interior do círculo mais próximo do ponto exterior é igual à distância da reta (que passa entre o ponto e o círculo) mais distante do ponto exterior.

Os relacionamentos **I** e **II** são conhecidos respectivamente como *Dualidade Fraca* e *Dualidade Forte*. Problemas duais onde ambos relacionamentos

estão presentes, trazem muita informação um do outro e são os mais procurados. Entretanto, pares de problemas duais onde somente **I** é respeitado, também são comumente utilizados.

Nesta dissertação, o problema primal, introduzido na seção 2.2, é um programa linear, o que permite encontrar um problema dual onde **I** e **II** estão presentes. A importância do problema dual é que muitas vezes ele provê outras interpretações para o problema.

Mais detalhes podem ser encontrados em livros de programação linear, como Chvatal [7], e Luenberger [8].

O problema dual associado ao modelo é:

$$\mathcal{D}(S) : \text{Min} \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j \quad (4-7)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + c_i w_i - l_j t_j &\geq 0 & i \in P_S & \quad j \in Q_S & (4-8) \\ u_i &\geq 0 & i \in P_S & & \\ v_j &\geq 0 & j \in Q_S & & \\ w_i &\geq 1 & i \in P_S & & \\ t_j &\geq 1 & j \in Q_S & & \end{aligned}$$

Segue o significado das variáveis do modelo:

$\mathcal{D}(S)$  Função objetivo do modelo dual.

$u_i$  Variável dual associada à  $i$ -ésima restrição de capacidade de produção (eq. 2-2).

$v_j$  Variável dual associada à  $j$ -ésima restrição da capacidade de consumo (eq. 2-3).

$w_i$  Variável dual associada à  $i$ -ésima restrição de ganho do produtor (eq. 2-4).

$t_j$  Variável dual associada à  $j$ -ésima restrição de gasto do consumidor (eq. 2-5).

A equação 4-7 é a função objetivo do problema. Nota-se que nela, apenas estão presentes as variáveis duais associadas as restrições das capacidades de produção e consumo (eq. 2-2 e 2-3).

As inequações 4-8 representam as  $m \cdot n$  restrições do problema. As demais inequações são as restrições de cada variável.

### 4.2.2 Distribuição Associada ao Dual

Como foi dito no Capítulo 2, a compensação dada a produtores e consumidores é feita em cima do *lucro* gerado pelo sistema, que é representado pela função objetivo (eq. 2-1).

Pelo **Teorema da Dualidade Forte** [9] (p.146-155), sabe-se que se um dado problema de programação linear tem solução ótima, seu problema dual também a tem, e os valores de suas funções objetivo são iguais.

Portanto, a distribuição do lucro pode ser pensada pela função objetivo do problema dual (eq. 4-7).

Analisando essa equação, percebe-se que ela nitidamente divide-se em duas contribuições distintas e positivas: uma dos produtores ( $\sum_{i=1}^n u_i p_i$ ) e uma dos consumidores ( $\sum_{j=1}^m v_j q_j$ ). Na verdade, pode-se perceber a contribuição individual de cada produtor ( $u_i \cdot p_i$ ) e consumidor ( $v_j \cdot q_j$ ).

Deseja-se então provar que esta distribuição do *lucro* associada às variáveis da formulação dual do jogo, é uma distribuição que pertence ao *núcleo* do jogo.

**Teorema 4.1** *Sejam  $(P, Q, p, q, c, l)$  os parâmetros do modelo e  $\mathcal{V}$  a função característica que define o jogo. Seja  $(u^*, v^*, w^*, t^*)$  a solução ótima para o problema dual  $\mathcal{D}(N)$ .*

*Então,  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \dots, v_m^* q_m)$  pertence ao núcleo do jogo  $C(\mathcal{V})$ .*

**PROVA:** *Pelo Teorema da Dualidade sabe-se que, na otimalidade, para todo  $S \in N$  tal que  $P \cap S$  e  $Q \cap S$  sejam não-vazios.*

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S))$$

*Para uma solução pertencer ao núcleo do jogo, a solução  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \dots, v_m^* q_m)$  tem que ser maior ou igual a  $\mathcal{V}(S)$ ,  $\forall S \subset N$ .*

*Primeiramente, deve-se observar que a solução  $(u^*, v^*, w^*, t^*)$  é uma solução factível para qualquer problema  $\mathcal{D}(S)$ ,  $S \subset N$ . Isto ocorre porque as restrições do problema são independentes entre si. Desta forma, qualquer produtor ou consumidor que saia do problema não invalida uma solução.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Naturalmente, a solução pode não ser mais ótima, mas permanece válida.

Ainda, deve-se perceber que, sendo a função objetivo do problema dual (eq. 4-7), uma função de minimização, qualquer solução válida é maior ou igual à solução ótima do problema. Em outras palavras:

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S)) \leq \sum_{i \in S_P} u_i^* p_i + \sum_{j \in S_Q} v_j^* q_j$$

Finalmente, para o caso de  $P \cap S = \emptyset$  ou  $Q \cap S = \emptyset$ , então  $\mathcal{V}(S) = 0$  e o teorema é válido trivialmente.  $\square$

### 4.3 Análise de Resultados

Nesta seção são mostrados alguns testes variando os parâmetros do modelo e são feitas algumas análises sobre cada teste. Esses testes são importantes para mostrar padrões de comportamento do modelo.

Vale ressaltar que foram realizados inúmeros casos de teste semelhantes a estes para que fosse possível chegar às conclusões aqui mostradas. Os testes mostrados aqui, são os exemplos considerados mais ilustrativos.

Seguem algumas definições, que são usadas posteriormente nas análises dos resultados:

**Definição 4.2 (Conjunto de Produtores Úteis  $U_p$ )** São os produtores que participam do leilão, isto é, que vendem uma ou mais unidades de seus produtos.

Ordenando os produtores em ordem crescente de preço e os consumidores em ordem decrescente de preço, a condição para o  $i$ -ésimo produtor participar do leilão é:

Seja,  $\Omega$  a soma das quantidades oferecidas por cada produtor até o anterior ao  $i$ -ésimo ( $\sum_{k=1}^{i-1} p_k$ ). Seja  $C_j$  o consumidor que esteja na faixa de preço  $\Omega$  ( $\sum_{k=1}^{j-1} q_k \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^j q_k$ ), se o preço cobrado pelo produtor  $i$  ( $c_i$ ) for menor que a oferta do consumidor  $j$  ( $l_j$ ), então o produtor  $i$  pertence ao conjunto de produtores úteis.

$$U_p = \left\{ P_i \mid c_i < l_j \text{ onde, } \Omega = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \text{ e } \sum_{k=1}^{j-1} q_k \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^j q_k \right\}$$

**Definição 4.3 (Conjunto de Consumidores Úteis  $U_c$ )** São os consumidores que participam do leilão, isto é, que compram uma ou mais unidades de algum produto.

A condição para um dado consumidor  $j$  pertencer ao conjunto é análoga a dos produtores. O conjunto  $U_c$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$U_c = \left\{ C_j \mid l_j > c_i \text{ onde, } \Omega = \sum_{k=1}^{j-1} q_j \text{ e } \sum_{k=1}^{i-1} p_i \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^i p_i \right\}$$

E são definidas algumas funções sobre esses conjuntos:

- $cap(U)$ : a soma das capacidades (de produção ou consumo) dos integrantes do conjunto.
- $minP(U)$ : o menor dos preços dos integrantes do conjunto.
- $maxP(U)$ : o maior dos preços dos integrantes do conjunto.

### 4.3.1

#### Varição do Preço do Produtor

No teste desta seção todos os parâmetros de todos os jogadores estarão fixos, exceto pelo preço de um dos produtores.

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	150	370	W	120	510
B	120	380	X	100	505
C	100	395	Y	130	490
D	110	450	Z	150	480

Tabela 4.1: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

As Tabelas 4.1 representam os parâmetros dos produtores (à esquerda) e consumidores (à direita). Para os produtores, a primeira coluna é o identificador, a segunda representa a quantidade que será oferecida no mercado e a terceira é o preço por unidade proposto. Para os consumidores, a primeira coluna é o identificador, a segunda é a demanda e a terceira é o preço oferecido por unidade de produto.

Nos testes foi variado o preço do Produtor **A**. Foram feitas 10 rodadas acrescentando em cada uma 10 unidades ao preço do produtor **A**. As Tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os resultados dos modelos para este teste.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados do teste para cada produtor. A primeira coluna representa a rodada do teste; a segunda, as quantidades vendidas por cada produtor; a terceira, os preços cobrados pela mercadoria

Rodada	Qt. Vendidas				Preços Cobrados				Preços Finais
#	A	B	C	D	A	B	C	D	A, B, C, D
1	150	120	100	110	370	380	395	450	480
2	150	120	100	110	380	380	395	450	480
3	150	120	100	110	390	380	395	450	480
4	150	120	100	110	400	380	395	450	480
5	150	120	100	110	410	380	395	450	480
6	150	120	100	110	420	380	395	450	480
7	150	120	100	110	430	380	395	450	480
8	150	120	100	110	440	380	395	450	480
9	150	120	100	110	450	380	395	450	480
10	150	120	100	110	460	380	395	450	480

Tabela 4.2: Resultados para os produtores no teste 4.3.1.

(os lances dos produtores); a quarta coluna é o preço a que a mercadoria foi vendida.

Este preço é calculado somando o total ganho com as vendas, com o total ganho pela redistribuição do lucro do sistema, dividido pelo total vendido, ou seja:

$$p_f = \frac{c_i \sum_j x_{ij} + u_i p_i}{\sum_j x_{ij}} \quad (4-9)$$

Pode-se perceber que se o total vendido for igual a capacidade de produção ( $\sum_j x_{ij} = p_i$ ), o preço final por unidade passa a ser  $c_i + u_i$ . Este raciocínio acaba por sugerir um significado à variável dual  $u_i$ : ela é a quantidade do lucro recebida por unidade de produto comercializada.

Por outro lado, se a quantidade vendida não for igual a capacidade de produção, significa que a restrição 4-2 terá folga, portanto sua variável dual valerá zero. Neste caso, este produtor não receberia nada do lucro do sistema e o preço final seria o próprio  $c_i$ . Esta discussão será retomada nos próximos exemplos e na próxima seção.

No caso deste teste, todos os produtores venderam todo o seu estoque, e suas variáveis duais tiveram valores não nulos. Isto pode ser visto pela diferença entre o preço cobrado inicialmente, e o preço final.

Na Tabela 4.3, são mostrados os resultados do teste para consumidores. A primeira coluna é a rodada do teste; a segunda são as quantidades compradas por cada consumidor; a terceira são os preços oferecidos e a quarta coluna é o preço final de compra dos consumidores.

O preço final dos consumidores é calculado diminuindo o total gasto pelo total recebido da parcela do lucro, dividido pelo total de produtos

Rodada	Qt. Compradas				Preços Oferecidos				Preços Finais
#	W	X	Y	Z	W	X	Y	Z	W, X, Y, Z
1	120	100	130	130	510	505	490	480	480
2	120	100	130	130	510	505	490	480	480
3	120	100	130	130	510	505	490	480	480
4	120	100	130	130	510	505	490	480	480
5	120	100	130	130	510	505	490	480	480
6	120	100	130	130	510	505	490	480	480
7	120	100	130	130	510	505	490	480	480
8	120	100	130	130	510	505	490	480	480
9	120	100	130	130	510	505	490	480	480
10	120	100	130	130	510	505	490	480	480

Tabela 4.3: Resultados para os consumidores no teste 4.3.1.

comprados, ou seja:

$$p_f = \frac{l_j \sum_i x_{ij} - v_j q_j}{\sum_i x_{ij}} \quad (4-10)$$

Um raciocínio análogo ao feito nos produtores pode ser empregado neste caso. As variáveis duais  $v_j$  podem ser encaradas como a quantia recebida por produto comprado.

É interessante notar que neste caso o consumidor **Z** não comprou o total demandado, portanto a restrição tinha folga e a variável dual era nula. De fato, o consumidor **Z** não recebeu qualquer parcela do lucro, pois o preço final é igual ao preço oferecido no lance.

Na Figura 4.1, as retas horizontais são os Lances dos produtores **B**, **C**, **D** e o preço final (reta mais em cima). A reta inclinada representa o lance do produtor **A**, o único a variar ao longo das rodadas.

Numa análise final deste exemplo, pode-se reparar que o mercado não alterou seu comportamento, apesar da variação de preço por parte de um dos produtores, como é mostrado na Figura 4.1. Essa variação, propositalmente, não ultrapassou o preço da menor oferta dos consumidores.

Este exemplo simples tem a utilidade de mostrar um aspecto do comportamento deste mercado. Pode-se perceber que a distribuição do lucro levou o mercado para o rumo de fixar um preço final para a mercadoria e de todos os participantes comprarem (ou venderem) por este preço. O fato do preço final ter sido igual para todos não é por acaso e ao longo dos próximos exemplos este comportamento será mais comentado.

Sendo assim, os objetivos iniciais do mercado, pelo menos para este exemplo, foram cumpridos. Tanto os produtores que cobraram menos,

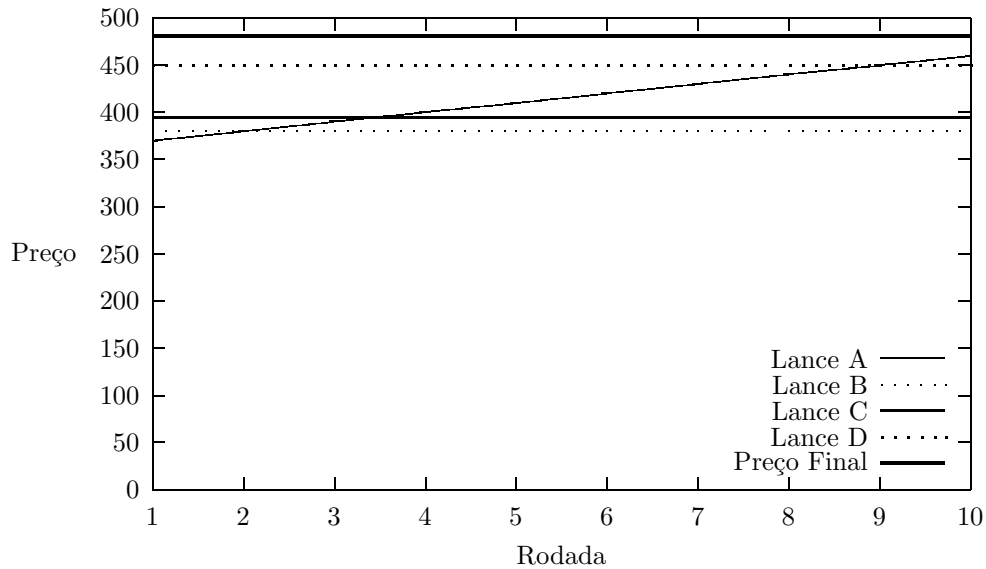


Figura 4.1: Preço Final e Lances dos Produtores

quanto os consumidores que ofereceram mais, receberam uma compensação maior por suas melhores ofertas. Apesar do preço final ter sido o mesmo, a vantagem de se oferecer mais ou cobrar menos é de que o participante aumenta suas chances de participar do mercado, dando um lance *melhor*.

### 4.3.2

#### Variação da Quantidade Ofertada pelo Produtor

Nesta seção será observado como o mercado se comporta frente a variação das quantidades ofertadas pelos produtores. Os parâmetros de todos os jogadores estarão fixados, exceto pela quantidade ofertada por um dos produtores.

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	60	420	W	70	513
B	100	427	X	50	512
C	60	435	Y	60	497
			Z	50	478

Tabela 4.4: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A Tabela 4.4 representa os parâmetros iniciais do teste. A organização da tabela é idêntica a do teste anterior. Neste teste o único parâmetro variado é a quantidade ofertada pelo produtor **A**, que aumenta em 10 unidades em cada rodada do teste.

Rodada	Quant. Ofertadas			Quant. Vendidas			Preços Finais	
#	A	B	C	A	B	C	A, B	C
1	60	100	60	60	100	60	478	478
2	70	100	60	70	100	60	478	478
3	80	100	60	80	100	50	435	435
4	90	100	60	90	100	40	435	435
5	100	100	60	100	100	30	435	435
6	110	100	60	110	100	20	435	435
7	120	100	60	120	100	10	435	435
8	130	100	60	130	100	0	435	-
9	140	100	60	140	90	0	427	-
10	150	100	60	150	80	0	427	-

Tabela 4.5: Resultados para os produtores no teste 4.3.2.

A Tabela 4.5 apresenta os resultados desta rodada de testes para os produtores. A segunda coluna desta tabela agora mostra as quantidades ofertadas, ao invés de mostrar os preços, já que estes estão fixos neste teste. A terceira coluna mostra as quantidades vendidas e a quarta, os preços finais.

A medida em que o produtor **A** foi aumentando sua oferta para o mercado, ele começou tirar o espaço dos outros produtores, uma vez que ele é o que oferece os melhores preços. Na oitava rodada o produtor **C** já estava fora do mercado e a partir da nona, o produtor **B** começou a perder comprador.

Além disso, o preço final permaneceu o mesmo para todos os produtores (que participaram do mercado). Porém, o preço não permaneceu fixo, como no exemplo anterior. Este fato é analisado mais a frente.

Rodada	Quant. Demandas				Quant. Compradas				Preços Finais
#	W	X	Y	Z	W	X	Y	X	W, X, Y, Z
1	70	50	60	50	70	50	60	40	478
2	70	50	60	50	70	50	60	50	478
3	70	50	60	50	70	50	60	50	435
4	70	50	60	50	70	50	60	50	435
5	70	50	60	50	70	50	60	50	435
6	70	50	60	50	70	50	60	50	435
7	70	50	60	50	70	50	60	50	435
8	70	50	60	50	70	50	60	50	435
9	70	50	60	50	70	50	60	50	427
10	70	50	60	50	70	50	60	50	427

Tabela 4.6: Resultados para os consumidores no teste 4.3.2.

A Tabela 4.6 segue mais ou menos o mesmo padrão da tabela do exemplo anterior, mudando apenas a coluna de Preços Oferecidos pela de Quantidades Demandadas.

Para esta tabela, vale reparar nas Quantidades Compradas pelo consumidor **Z**, que na primeira rodada não comprava a sua demanda total (40 de 50) e nas rodadas seguintes passou a supri-la totalmente. Também vale reparar que a tendência observada no primeiro teste, de estipular um preço final para todos os participantes, foi seguida a risca aqui.

Resta agora, entender o comportamento do preço final, que mostrou uma sensibilidade à variação de ofertas nesse exemplo. A Figura 4.2 ilustra esse comportamento do Preço Final ao longo das rodadas, associando-o agora com a variação de oferta.

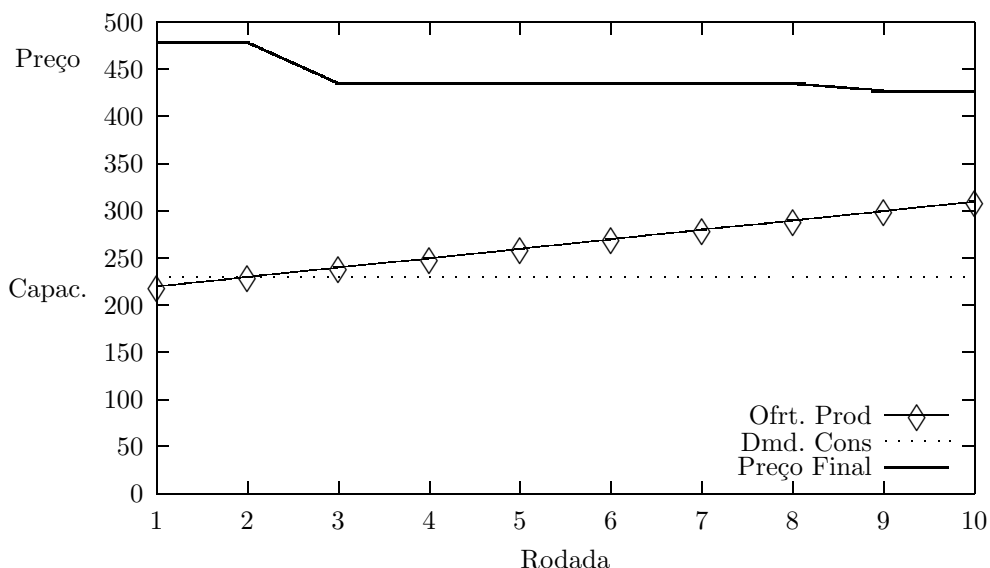


Figura 4.2: Preço Final e Capacidades Totais dos Produtores e Consumidores

Na Figura 4.2 a curva mais acima é o Preço Final da mercadoria ao longo das rodadas. Esse preço sofre duas quedas, uma da 2ª para a 3ª rodada (de 478 para 435) e a outra da 8ª para 9ª (de 435 para 427).

Primeiramente, deve-se reparar nos valores dos preços estabelecidos: 478 é o preço do consumidor **Z**, 435 é o preço do produtor **C** e 427 é o preço do produtor **B**.

Agora, analisando os conjuntos  $U_p$  e  $U_c$  ao longo de cada rodada, pode-se tirar algumas conclusões sobre as transições:

- Primeiro, deve-se reparar na soma das capacidades (de compra ou venda) dos integrantes dos conjuntos. Inicialmente  $cap(U_p)$  vale 220 (60+100+60), enquanto  $cap(U_c) = 230$  (70+50+60+50).

Com isso, a restrição de capacidade de consumo (eq. 4-3) para o consumidor **Z** terá folga fazendo com que sua variável dual, assim como sua porção do lucro do sistema, sejam nulas. Portanto, é natural que o preço fixado para o mercado seja o do consumidor pertencente a  $U_c$  que ofereça o menor preço, o comprador **Z**.

Na 3ª rodada  $cap(U_p)$  passou a ser maior que  $cap(U_c)$  (240 e 230, respectivamente). Com isso a restrição que passou a ter folga foi a da capacidade de produção (eq. 4-2) para o produtor **C**. Então, por um raciocínio análogo ao anterior, o preço do mercado passa a ser o preço do produtor **C**, 435.

- Para entender a transição na nona rodada, basta analisar a composição do conjunto  $U_p$ . Na nona rodada, o produtor **C** não pertence mais ao conjunto  $U_p$ <sup>2</sup> e  $cap(U_p) > cap(U_c)$ . Portanto, o preço passa a ser ditado pelo produtor **B**, já que a sua restrição de capacidade passou a ter folga.

A Tabela 4.7 resume essa dinâmica de Preços e Capacidades relacionadas aos conjuntos  $U_p$  e  $U_c$ .

Rodada	$U_p$	$U_c$	Relação	Preço
1	{A, B, C}	{W, X, Y, Z}	$cap(U_p) < cap(U_c)$	478
3	{A, B, C}	{W, X, Y, Z}	$cap(U_p) > cap(U_c)$	435
9	{A, B}	{W, X, Y, Z}	$cap(U_p) > cap(U_c)$	427

Tabela 4.7: Dinâmica dos Preços e das Capacidades

#### 4.4

##### Reinterpretação do Núcleo

Já foi visto na seção 4.2 que o núcleo do jogo pode ser obtido através das variáveis duais do modelo. Porém, essa informação, a principio não diz nada sobre o significado da solução. Nesta seção são feitas algumas análises sobre os resultados mostrados na seção anterior, e são vistos alguns padrões nas soluções encontradas. Ao longo desta seção, é visto uma outra maneira de chegar ao *núcleo* do problema.

<sup>2</sup>Na verdade, desde a oitava rodada ele não pertence ao conjunto  $U_p$ , mas o caso em que  $cap(U_p) = cap(U_c)$  será visto mais adiante

Pelos resultados mostrados na seção anterior, foi possível observar dois padrões na forma dessa solução:

- O fato da solução sempre determinar um preço único para todos os integrantes do mercado
- Como este preço é influenciado pelas capacidades de produtores e consumidores que pertençam aos conjuntos  $U_p$  e  $U_c$ .

Os dois teoremas a seguir formalizam essas idéias, mostrando que os padrões vistos sempre ocorrem em soluções deste modelo.

**Teorema 4.4** *Dado um jogo definido pela tupla  $\langle P, Q, p, q, c, l \rangle$  e função característica  $\mathcal{V} = \mathcal{L}(S)$ , o preço final  $p_f$  definido pelo lance inicial e o retorno do sistema para cada jogador será igual para todos os jogadores.*

PROVA: Suponha uma solução de núcleo em que um dos produtores tenha um preço final  $\alpha$  unidades ( $0 < \alpha < \min P(U_c) - \max P(U_p)$ ) maior que o preço final estabelecido originalmente. Para que este produtor venda por este preço, ou algum consumidor está pagando um preço maior que  $p_f$  ou algum produtor está vendendo por um preço menor que  $p_f$  (ou as duas coisas estão acontecendo ao mesmo tempo).

Esta solução não pode ser do núcleo, pois um produtor que ganhe  $\beta$  unidades a menos que  $p_f$  pode formar uma coalizão a parte oferecendo um preço de  $p_f - \delta$  ( $0 < \delta < \beta$ ) com qualquer consumidor que pague  $p_f$  (ou mais).

Da mesma forma, um consumidor que pague mais do que  $p_f$  poderia formar uma coalizão a parte com qualquer produtor que estivesse recebendo  $p_f$  (ou menos) por unidade de produto.

Por outro lado, com todos os jogadores tendo um preço final fixo  $p_f$ , é bem claro que nenhum deles pode desviar desse preço, pois um produtor que queira ganhar mais do que  $p_f$  teria que formar coalizão com consumidores que estivessem dispostos a pagar mais que  $p_f$ . Nenhum consumidor poderia aceitar tal proposta já que ela significa prejuízo nas compras.  $\square$

**Teorema 4.5** *Dado um modelo definido pela tupla  $\langle P, Q, p, q, c, l \rangle$  e os conjuntos  $U_p$  e  $U_c$  associados, tem-se que: o preço final está entre o maior preço dos produtores em  $U_p$  e o menor preço dos consumidores em  $U_c$ . E, em particular, se:*

- se  $\text{cap}(U_p) < \text{cap}(U_c)$  - o preço do produto é determinado pelo menor dos preços de  $U_c$ .

- se  $cap(U_p) > cap(U_c)$  - o preço do produto é determinado pelo maior dos preços de  $U_p$ .

PROVA: A primeira afirmação é garantido na construção do modelo. Dado que os conjuntos  $U_p$  e  $U_c$  contêm os produtores e consumidores que efetivamente participam do mercado, o preço final *tem* que estar entre  $maxP(U_p)$  e  $minP(U_c)$ , uma vez que é garantido no modelo que nenhum produtor recebe menos do que cobrou e nenhum consumidor paga mais do que ofereceu.

Para provar a segunda afirmação, suponha uma situação que  $cap(U_p) < cap(U_c)$  e o preço final é de  $\alpha$  unidades menor que  $minP(U_c)$ . Neste caso, pode ser vantajoso para o consumidor que possui o menor preço (e que portanto, não compra sua demanda total) formar uma coalizão oferecendo comprar por preços um pouco mais altos (sem ultrapassar sua oferta) atraindo produtores para sua coalizão. Repare que isto só não pode acontecer quando o preço final é igual ao menor preço dos consumidores em  $U_c$ .

Raciocínio análogo pode ser feito para provar a terceira afirmação. Numa situação em que  $cap(U_p) > cap(U_p)$ , se o preço final for maior que  $maxP(U_p)$ , o produtor que possui o maior dos preços (e não vendeu sua capacidade total), pode oferecer um preço um pouco menor e formar coalizões a parte. Esta possibilidade só é vetada se o preço final for igual ao maior dos preços dos produtores em  $U_p$ .  $\square$

Os resultados comprovados por este último teorema podem ser associados com a conclusão de Shapley e Shubik sobre Jogos de Atribuição (*Assignment Games*) em [10]. Em seu trabalho, Shapley e Shubik provaram que a contribuição de um jogador para uma certa coalizão é menor quando há um excesso de jogadores de seu *tipo*.

Adaptando este resultado para o modelo aqui apresentado, pode-se interpretar o “excesso de jogadores” como o excesso de capacidade (seja de produção ou consumo), como um fator determinante na contribuição do jogador para o núcleo. Em outras palavras, o tipo de jogador que estiver com a maior capacidade tende a ter menor participação no núcleo (isto foi visto claramente no exemplo 4.3.2).

Estes resultados também são coerentes com a Teoria Macroeconômica. Isto é, se a oferta de um produto é aumentada (isoladamente, sem outra influência) a tendência do preço dessa mercadoria é diminuir. Em contrapartida, se a demanda por um produto aumenta, a tendência de seu preço é aumentar.

Uma consequência destes Teoremas é que para se determinar o montante que é que cada produtor irá receber e o montante que cada consumidor irá pagar. Não é necessário resolver um programa linear. Basta computar  $U_p$  e  $U_c$  a partir da ordenação de produtores e consumidores pelos seus respectivos lances.

## 5

### Jogo com Extensões

Neste capítulo são apresentados os jogos associados a cada extensão apresentada no capítulo 2 (sec. 2.3). Será seguida uma organização semelhante à do capítulo 4, isto é, em cada seção será apresentada uma extensão, e ao longo das sub-seções são apresentados os jogos, as distribuições do lucro sugeridas e são feitas algumas análises.

A organização de cada seção é feita de maneira semelhante ao que foi feito para o modelo básico. Os modelos dos jogos são apenas adequações dos modelos lineares previamente apresentados para a formulação de jogos cooperativos. As distribuições do lucro apresentam os mesmos objetivos, sendo que o foco principal recai sobre soluções que pertencem ao núcleo. As análises do modelo são feitas sempre com o auxílio de exemplos.

Na seção 5.1 é apresentado o jogo com o custo de transporte associado à mercadoria. A seção 5.2 contém o jogo com economia de escala na oferta do consumidor. A seção 5.3 apresenta o jogo com múltiplos produtos.

#### 5.1

##### Jogo com Custo de Transporte

Esta seção contém o jogo associado ao modelo com um custo de transporte na mercadoria. Seguindo o modelo adotado no capítulo 4, primeiramente é apresentado o modelo de programação linear associado ao jogo na seção 5.1.1, em seguida é apresentado o núcleo do jogo na seção 5.1.2 e na seção 5.1.3 são mostrados alguns exemplos desse jogo.

##### 5.1.1

###### Modelo do Jogo

Conforme adiantado na seção 2.3.1, a mudança introduzida ao modelo básico ocorre apenas pelos coeficientes de transporte  $t_{ij}$ , que representam

o custo de transportar uma unidade da mercadoria do produtor  $i$  para o consumidor  $j$ , e que são introduzidos diretamente na função objetivo.

O jogo é definido de maneira idêntica à seção 4.1, isto é, o conjunto de jogadores  $N$  é representado por  $P \cup Q$  e a função de valoração  $\mathcal{V}$  é o lucro  $\mathcal{L}(S)$  de cada coalizão  $S \subset N$  formada, com  $\mathcal{V}(S) = 0$  se  $P \cap S$  ou  $Q \cap S$  forem vazios.

Segue o modelo para o jogo com custo de transporte:

$$\mathcal{L}(S) : \text{Max} \sum_{j \in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i - \sum_{i \in P_S} \sum_{j \in Q_S} t_{ij} \quad (5-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij} \leq p_i \quad i \in P_S \quad (5-2)$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij} \leq q_j \quad j \in Q_S \quad (5-3)$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i x_{ij} \quad i \in P_S \quad (5-4)$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j x_{ij} \quad j \in Q_S \quad (5-5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i \in P_S \quad j \in Q_S \quad (5-6)$$

### 5.1.2

#### Distribuição do Lucro

Nesta seção é apresentada a distribuição de lucro do jogo. Esta distribuição deve conter as mesmas propriedades do modelo básico. Portanto, primeiramente deve-se encontrar uma solução que pertença ao núcleo do jogo.

O núcleo pode ser deduzido de maneira análoga à da seção 4.2, ou seja, a partir do problema dual. Assim como no modelo básico, no modelo com custo de transporte as variáveis duais determinam uma solução pertencente ao núcleo.

Segue o modelo dual associado a este jogo:

$$\mathcal{D}(S) : \text{Min} \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j \quad (5-7)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + c_i w_i - l_j y_j &\geq -t_{ij} & i \in P_S & \quad j \in Q_S & (5-8) \\ u_i &\geq 0 & i \in P_S & \\ v_j &\geq 0 & j \in Q_S & \\ w_i &\geq 1 & i \in P_S & \\ y_j &\geq 1 & j \in Q_S & \end{aligned}$$

Observando a função objetivo deste modelo dual (eq. 5-7) percebe-se que apenas as variáveis  $u_i$  e  $v_j$  estão presentes, o que sugere uma solução semelhante à do modelo básico:  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \dots, v_m^* q_m)$ .

Segue o teorema que prova esta afirmação.

**Teorema 5.1** *Sejam  $(P, Q, p, q, c, l, T)$  os parâmetros do modelo e  $\mathcal{V}$  a função característica que define o jogo. Seja  $(u^*, v^*, w^*, y^*)$  a solução ótima para o problema dual  $\mathcal{D}(N)$ .*

*Então,  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \dots, v_m^* q_m)$  pertence ao núcleo do jogo  $C(\mathcal{V})$ .*

PROVA: A prova desse teorema é idêntica à do **Teorema 4.1**. As restrições do problema dual são independentes entre si, portanto se for retirado algum produtor ou consumidor isso não afeta a validade da solução.

Na verdade, retirando algum produtor ou consumidor, fica claro que o problema torna-se apenas menos restritivo. Num problema de minimização, isto quer dizer que a solução encontrada para qualquer problemas  $\mathcal{D}(S)$  é menor ou igual a soma de  $u_i^* p_i$  e  $v_j^* q_j$ , para  $i, j \in S$ . Expressando matematicamente, tem-se:

$$\mathcal{V}(S) \leq \sum_{i \in P_S} u_i^* p_i + \sum_{j \in Q_S} v_j^* q_j \quad \forall S \subset N.$$

Esta é exatamente a condição para a solução  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \dots, v_m^* q_m)$  pertencer ao núcleo.  $\square$

### 5.1.3 Análise de Resultados

Nesta seção é feita a análise do comportamento do modelo com esta extensão. Como feito anteriormente, esta análise é feita através de comentários sobre alguns exemplos de jogos simples.

*JOGO 1 - Coeficiente de Transporte Baixo:* Neste exemplo o coeficiente de transporte é desprezível e não altera as relações entre os participantes do mercado.

Esta situação pode ocorrer quando o coeficiente de transporte é desprezível em relação aos preços dos produtos e também em relação às diferenças de preços entre os jogadores. Ou mesmo quando a tarifação é praticamente uniforme e não haja grandes discrepâncias entre o que é cobrado para cada integrante do mercado.

Por exemplo, suponha uma alíquota cobrada sobre o preço de um determinado produto. Essas alíquotas são muitas vezes um percentual fixo sobre o preço do produto. Neste caso, as relações entre os jogadores permanecem inalteradas, uma vez que a ordem dos preços dos produtores e consumidores não será alterada.<sup>1</sup>

Seguem as tabelas de dados para o jogo:

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	120	360	X	125	410
B	100	370	Y	130	400
C	150	375	Z	120	390

Tabela 5.1: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

Coeficientes de Transportes			
Produtores	Consumidores		
	X	Y	Z
A	5	6	8
B	6	7	7
C	7	8	10

Tabela 5.2: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A Tabela 5.1 segue o mesmo modelo das tabelas de entrada de dados anteriores. A Tabela 5.2 é uma matriz representando os custos de transporte,

<sup>1</sup>Naturalmente, neste caso, pode haver mudança entre as cardinalidades dos conjuntos de produtores e consumidores que participam do mercado ( $U_p$  e  $U_c$ ).

onde a entrada  $i, j$  é o custo unitário de transporte do produtor na  $i$ -ésima linha para o consumidor da  $j$ -ésima coluna.

Para este jogo foi feita apenas uma rodada com os dados iniciais. As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os resultados do teste.

Compra e Venda			
Produtores	Consumidores		
	X	Y	Z
A	120	0	0
B	0	0	100
C	5	130	15

Tabela 5.3: Matriz de compras e vendas dos participantes do mercado

A Tabela 5.3 apresenta a matriz de vendas deste exemplo. A entrada  $i, j$  representa as vendas do produtor da  $i$ -ésima linha para o consumidor da  $j$ -ésima coluna.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	120	22	382	X	125	23	387
B	100	13	383	Y	130	12	388
C	150	5	380	Z	120	0	390

Tabela 5.4: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

A Tabela 5.4 contém as sumarizações dos dados. **Vendas** e **Compras** são os totais vendidos (pelos produtores) e comprados (pelos consumidores). **Retorno** significa a quantidade de lucro do sistema dada a cada jogador por unidade de produto. **P. Final** é o preço final do produto, já levando-se em conta o *retorno* do sistema.

O que pode ser visto na Tabela 5.4 é que não houve mais a fixação de um preço final para todos os integrantes. Para um mercado sem o custo de transporte, esse preço final seria de 390, ou seja, o preço oferecido pelo consumidor **Z** inicialmente.<sup>2</sup>

Porém, para custos que sejam desprezíveis em relação aos preços do mercado, ou mesmo que sejam proporcionais aos preços de cada participante<sup>3</sup>, é possível distinguir os comportamentos dos participantes.

<sup>2</sup>Conforme análises feitas no Capítulo 4.

<sup>3</sup>É importante que não se altere a ordem dos participantes com relação ao seu lance no mercado

Por exemplo: como já foi dito, o preço final esperado para este mercado era de 390. Porém, todos os produtores ficaram abaixo deste preço, e alguns consumidores obtiveram preços menores nas compras.

O único participante a ter preço final de 390 foi o consumidor **Z**, já que esse é o seu próprio preço e a sua parcela do lucro é a única nula, já que sua restrição de capacidade é a única com folga.

Também pode-se perceber que os produtores arcaram com os custos do transporte. O produtor **A** pagou 8, **B** pagou 7, **C** pagou 10. O fato de alguns consumidores terem conseguido preços ainda menores que 390, deve-se a um excedente pago pelo transporte por parte dos produtores. Isso gerou um excedente de 3 para o consumidor **X** e de 2 para o consumidor **Y**.

É importante notar que neste jogo, o padrão para se calcular o preço final dos jogadores foi semelhante ao do modelo básico. O conjunto  $U_c$  tinha uma demanda maior que a oferta de  $U_p$  ( $375 > 370$ ) e portanto o preço base foi o preço da menor oferta dos consumidores.

Este caso segue o mesmo padrão do jogo básico se for invertida a relação entre  $U_p$  e  $U_c$ . Seguindo a Tabela 5.1 trocando apenas a oferta de **A** por 125 e a demanda de **X** por 120, leva ao resultado apresentado na Tabela 5.5.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	125	17	377	X	120	28	382
B	100	8	378	Y	130	17	383
C	145	0	375	Z	120	5	385

Tabela 5.5: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

Na Tabela 5.5 o que pode ser visto é que o preço base foi o preço de **C** (375), que é o único jogador com folga na restrição de capacidade. O custo do transporte passou a ser debitado do lucro dos consumidores, e os produtores **A** e **B** passaram a captar o excedente retirado do lucro dos consumidores.

A análise deste jogo (e de sua variação) serve para mostrar que quando os coeficientes de transporte são desprezíveis e não alteram os conjuntos  $U_p$  e  $U_c$ , o comportamento do mercado tem semelhança com o mercado básico. Principalmente no que diz respeito ao *preço base*.

**JOGO 2 - Coeficientes de Transporte Altos:** Neste exemplo os coeficientes de transporte serão menos uniformes e terão grandes discrepâncias entre si.

Esta situação é comum em mercados internacionais. Alguns países mantêm acordos de redução de alíquotas de certos produtos, enquanto com outros países as mesmas alíquotas não sofrem descontos. Isso gera uma grande diferença nos impostos e conseqüentemente no preço final do produto.

As Tabelas 5.6 e 5.7 mostram os dados de entrada deste jogo:

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	120	360	X	125	410
B	100	360	Y	130	400
C	150	375	Z	120	390

Tabela 5.6: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

Coeficientes de Transporte			
Produtores	Consumidores		
	X	Y	Z
A	5	20	40
B	15	2	2
C	10	2	20

Tabela 5.7: Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.

Para as Tabelas 5.6 e 5.7 procurou ser mantido quase a mesma entrada do jogo anterior, realizando mudanças apenas na capacidade do consumidor **X** e nos coeficientes de transporte, que passaram a ter variações bruscas e valores elevados.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	100	0	360	X	100	45	365
B	100	18	388	Y	130	23	377
C	130	0	375	Z	100	0	390

Tabela 5.8: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

O resultados desse jogo, mostrados na Tabela 5.8 revelam alguns comportamentos diferentes em relação aos jogos anteriores. Dois produtores (**A** e **C**) e um consumidor (**Z**) venderam apenas parte da sua capacidade total, portanto seus preços finais permaneceram iguais aos iniciais.

O produtor **B** vendeu seu total para o consumidor **Z** e obteve um preço final de 388. Seu preço final seria 390, mas do seu lucro foi descontado o custo de transporte (de 2 unidades). O mesmo ocorreu com os consumidores

**X** e **Y**: **X** comprou seu total de **A** e seu preço final foi o preço de **A** mais transporte ( $360+5$ ), assim como o preço de **Y** foi o preço de **C** mais transporte ( $375+2$ ).

Os resultados apresentados por este jogo mostram que num mercado em que o custo de transporte é considerável e sofre muitas oscilações, a determinação do preço final não pode mais ser feita seguindo o padrão do modelo básico. Isto ocorre porque os conjuntos  $U_p$  e  $U_c$  não podem mais ser determinados da mesma maneira, já que o custo de transporte praticamente determina um preço diferente para cada par  $i, j$  de produtor e consumidor.

Esta situação acaba sendo bastante semelhante à apresentada no trabalho de Soriano et. al [12], onde é analisado o jogo de transporte. A diferença para o jogo aqui mostrado é que ele concentra num coeficiente  $b_{ij}$  o custo  $l_j - c_i - t_{ij}$ .

A conclusão tirada é que a única garantia para produtores e consumidores neste tipo de situação é que: produtores nunca receberão menos do que o preço pedido. E consumidores nunca pagarão mais do que o preço oferecido. E isto é garantido na construção do modelo, em sua função objetivo.

Como observação final, não é provado aqui que o conjunto de soluções duais são as únicas soluções de núcleo existentes. No trabalho de Soriano et. al [12], é visto que o conjunto de soluções do núcleo contém soluções que não estão no conjunto de soluções ótimas do problema dual.

## 5.2

### Jogo com Economia de Escala

Nesta seção será apresentado o jogo associado ao modelo com economia de escala na oferta dos consumidores e o seu núcleo será deduzido e analisado. De maneira análoga ao que foi feito no capítulo 4, nesta seção será apresentado o modelo de programação linear do jogo (sec. 5.2.1), em seguida é apresentado o núcleo (sec. 5.2.2) e na seção 5.2.3 são feitas algumas análises.

#### 5.2.1

##### O Jogo

Conforme explicado na seção 2.3.2, a economia de escala no preço oferecido pelo consumidor permite que este estabeleça preços de acordo com as quantidades compradas. Para isso cada consumidor define um vetor  $b^j$  de

*faixas de preços* e um vetor  $l^j$  contendo um preço para cada faixa definida. As matrizes  $B$  e  $L$  contêm as faixas e os preços de todos os consumidores.

O jogo com economia de escala pode ser definido por uma tupla  $\langle P, Q, p, q, c, L, B \rangle$ . O conjunto de jogadores  $N$  é  $P \cup Q$  e a função de valoração  $\mathcal{V}$  que avalia o lucro de cada coalizão  $S \subset N$ .

Segue o modelo do jogo:

$$\mathcal{L}(S) : \text{Max} \sum_{j \in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i \quad (5-9)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q_S} x_{ij} &\leq p_i & i \in P_S \\ \sum_{i \in P_S} x_{ij} &\leq q_j & j \in Q_S \\ \gamma_i &= \sum_{j \in Q_S} c_i x_{ij} & i \in P_S \\ \psi_j &\leq \sum_{i \in P_S} l_j^k x_{ij} + \beta_j^k & j \in Q_S \quad k = 1, \dots, |b^j| \end{aligned} \quad (5-10)$$

$l_j^k$  Preço do consumidor  $j$  para a faixa de preço  $k$ .

$\beta_j^k$  Coeficiente linear da reta. Na seção 2.3.2 é mostrado como se calcula esse valor.

$|b^j|$  Dimensão do vetor  $b^j$ . É o número de faixas de preço para o consumidor  $j$ .

### 5.2.2

#### A Distribuição do Lucro

Esta seção contém a distribuição do lucro para o jogo com economia de escala. Seguindo o mesmo raciocínio do modelo básico, serão procuradas soluções que pertençam ao núcleo, com o intuito de que essas soluções gerem distribuições que cumpram com os objetivos iniciais do mercado.

Novamente, será introduzido o modelo dual, para se obter uma solução que pertence ao núcleo a partir das variáveis duais. Será que visto que também para este jogo, as variáveis duais definem uma solução de núcleo.

Segue o modelo dual associado a este jogo:

$$\mathcal{D}(S) : \text{Min} \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{|b^j|} y_j^k \beta_j^k \quad (5-11)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + c_i w_i - \sum_{k=1}^{|b^j|} l_j^k z_j^k &\geq 0 & i \in P_S & \quad j \in Q_S & (5-12) \\ u_i &\geq 0 & i \in P_S & & \\ v_j &\geq 0 & j \in Q_S & & \\ w_i &\geq 1 & i \in P_S & & \\ y_j^k &\geq 1 & j \in Q_S & \quad k = 1, \dots, |b^j| & \end{aligned}$$

Para este dual, uma mudança importante com relação ao dual básico. A função objetivo (eq. 5-11) passa a ter as variáveis  $y_j^k$ . Como essas variáveis são relativas às restrições de gasto dos consumidores, é natural que a contribuição dessas variáveis para o lucro seja distribuída entre os consumidores.

Portanto, a distribuição de lucro induzida pelas variáveis duais seria: cada produtor  $i$  recebendo  $u_i p_i$  e cada consumidor  $j$  recebendo  $v_j q_j + \sum_k y_j^k \beta_j^k$ .

O teorema a seguir prova esta afirmação. A prova segue a mesma linha das anteriores.

**Teorema 5.2** *Sejam  $(P, Q, p, q, c, L, B)$  os parâmetros do modelo e  $\mathcal{V}$  a função característica que define o jogo. Seja  $(u^*, v^*, w^*, y^*)$  a solução ótima para o problema dual  $\mathcal{D}(N)$ .*

*Então,  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \dots, v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$  pertence ao núcleo do jogo  $C(\mathcal{V})$ .*

PROVA: A prova desse teorema é bastante semelhante à dos Teoremas 4.1 e 5.1 e será resumida aqui.

Se o problema  $\mathcal{L}(S)$  tem solução ótima, sabe-se pelo **Teorema da Dualidade** que o problema dual  $\mathcal{D}(S)$  também a tem e o valor da função objetivo é igual. Portanto:  $\mathcal{V}(S) = \mathcal{L}(S) = \mathcal{D}(S)$ .

Além disso, está claro que a solução do problema  $\mathcal{D}(N)$ ,  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \dots, v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$ , é uma solução factível para o problema  $\mathcal{D}(S)$ . Portanto, por  $\mathcal{D}(S)$  ser uma minimização:

$$\mathcal{D}(S) \leq \sum_{i \in P_S} u_i^* p_i + \sum_{j \in Q_S} (v_j^* q_j + \sum_k y_j^{*k} \beta_j^k)$$

Portanto, a distribuição  $(u_1^* p_1, \dots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \dots, v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$  pertence ao núcleo do jogo.  $\square$

### 5.2.3 Análises

Nesta seção é feita a análise da distribuição do lucro sugerida na seção anterior. É observado se ela cumpre com os objetivos primordiais do mercado. Além disso, é analisado o padrão de comportamento dessa distribuição dadas as variações do mercado.

**JOGO 1 - Variação da Oferta do Produtor:** Este jogo apresenta 3 produtores e 3 consumidores com economia de escala no preço oferecido pelos produtos. O teste visa capturar o comportamento do mercado à alteração da demanda de um dos produtores.

A Tabela 5.9 contém os parâmetros iniciais do jogo. Esta tabela segue o mesmo padrão das anteriores, adicionando a informação da economia de escala. As *faixas de preço* no consumidor indica como é feita a compra. Cada coluna das *faixas de preço* correspondem a uma coluna no *lance*. Por exemplo, para o consumidor **X**, as primeiras 10 unidades ele compra a 100, as 90 seguintes a 90 e as 500 seguintes a 78.

Produtor			Consumidor							
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Faixas de Preço			Lance		
A	120	70	X	500	10	90	500	100	90	78
B	310	74	Y	400	100	300	-	90	82	-
C	230	75	Z	500	50	250	300	100	85	70

Tabela 5.9: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A partir desses dados, foram feitas 10 rodadas de testes acrescentando 100 unidades na oferta do produtor **A** a cada rodada. Os resultados para estes testes estão nas tabelas 5.10 e 5.11.

A primeira observação a ser feita sobre os resultados é que foi mantido o comportamento de estabelecer um preço final único para produtores e consumidores. Este comportamento foi visto no modelo básico e não se manteve com a adição do custo de transporte.

Este modelo tem em comum com o modelo básico o fato de não haver diferença de preço de um produtor para outros consumidores, situação

Rodada	Qt. Ofertadas			Qt. Vendidas			Preços Finais		
#	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	120	310	230	120	310	230	82	82	82
2	220	310	230	220	310	230	82	82	82
3	320	310	230	320	310	230	78	78	78
4	420	310	230	420	310	230	78	78	78
5	520	310	230	520	310	230	78	78	78
6	620	310	230	620	310	230	78	78	78
7	720	310	230	720	310	170	75	75	75
8	820	310	230	820	310	70	75	75	75
9	920	310	230	920	280	0	74	74	-
10	1020	310	230	1020	180	0	74	74	-

Tabela 5.10: Resultados para os produtores no JOGO 1.

Rodada	Qt. Demandadas			Qt. Compradas			Preços Finais
#	X	Y	Z	X	Y	Z	X, Y, Z
1	500	400	500	100	260	300	82
2	500	400	500	100	360	300	82
3	500	400	500	160	400	300	78
4	500	400	500	260	400	300	78
5	500	400	500	360	400	300	78
6	500	400	500	460	400	300	78
7	500	400	500	500	400	300	75
8	500	400	500	500	400	300	75
9	500	400	500	500	400	300	74
10	500	400	500	500	400	300	74

Tabela 5.11: Resultados para os consumidores no JOGO 1.

possível em um mercado com custo de transporte. Isto é, não faz diferença para um produtor, o consumidor para o qual ele está vendendo e vice-versa. Com isso, o conceito dos conjuntos  $U_p$  e  $U_c$  permanece praticamente o mesmo do modelo básico, com pequenas alterações para se adequar ao sistema de preço com economia de escala.

Logo no resultado da primeira rodada, já pode ser notado um comportamento peculiar deste jogo. Todos os produtores vendem o total de sua capacidade de produção. Nenhum dos consumidores teve sua demanda total suprida. Ainda assim, os consumidores receberam algum retorno do sistema devido à contribuição  $\sum_j \sum_k y_j^k \beta_j^k$ .

O consumidor **X** vendeu 100 unidades, 10 por 100 e 90 por 90. O consumidor **Y** comprou 260 unidades, 100 a 90, 160 a 82. O consumidor **Z** comprou 300 unidades, 50 a 100 e 250 a 85. Se ao invés de serem consideradas as demandas totais, passarem a ser consideradas as faixas de preço, pode-

se ver que apenas um consumidor não vendeu o total de sua faixa: o consumidor **Y**, que vendeu 160 de 300. O preço dessa faixa é 82, que é o preço final estabelecido nessa rodada.

Interessante notar que apesar do consumidor **Y** ter comprado algumas unidades a 90 e outras a 82, o sistema consolidou o preço de 82. Para os outros consumidores o preço também foi fixado nesse valor, já que o *Teorema 4.2* é válido neste caso.

A partir da 3<sup>a</sup> rodada, quando o consumidor **Y** supriu sua demanda, os produtores passaram a vender para o consumidor **X**, na sua 3<sup>a</sup> faixa de preço (78), e esse passa a ser o preço estabelecido até a 7<sup>a</sup> rodada, quando o consumidor **X** supriu sua demanda total e o produtor **C** deixou de vender o total de sua produção, portanto o preço passou a ser o preço oferecido por **C** (75). Na 9<sup>a</sup> rodada, o produtor **C** saiu do mercado e o preço passou a ser o de **B** (74).

A principal mudança do comportamento desse jogo para o jogo *básico* é que a determinação do preço final não depende mais exclusivamente das capacidades de produção e consumo. As faixas de preço funcionam como delimitadores de consumo e com isso passam a determinar o preço de mercado.

### 5.3 Jogo com Múltiplos Produtos

Esta seção contém o jogo associado ao modelo com múltiplos produtos no mercado. Seguindo o modelo das seções anteriores, na seção 5.3.1 é apresentado o jogo, na seção 5.3.2 é apresentado o seu núcleo e na na seção 5.3.3 são feitas algumas análises sobre exemplos de jogos.

Em seguida é apresentado como restrições de acoplamento pode alterar esse jogo Restrições de acoplamento são aquelas que reúnem mais de um produto sob uma mesma restrição. Por exemplo, pode haver uma restrição de capacidade total de produção, ou uma restrição de total gasto pelos consumidores.

Restrições desse tipo pode gerar a compra de produtos em quantidades fracionárias. Se o produto puder ser comercializado com quantidades fracionárias, o modelo pode ser aplicado sem mudanças. Porém, se o mercado estiver lidando com produtos indivisíveis (isto é, se o ítem só puder ser comercializado a quantidades inteiras) ocorrem mudanças profundas de como este modelo deve ser encarado.

Na seção 5.3.4 é apresentado o jogo com uma restrição de acoplamento e na seção 5.3.5 é feita uma análise das implicações da inserção desse tipo de restrição com produtos indivisíveis ou não.

### 5.3.1

#### O Jogo

O jogo com múltiplos produtos é fundamentalmente o jogo básico estendido para mais de um produto, acrescido de eventuais *restrições de acoplamento* sobre os produtos. Segue o modelo do jogo:

$$\mathcal{L}(S) : \text{Max} \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k - \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} \gamma_i^k \quad (5-13)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij}^k \leq p_i^k \quad i \in P_S \quad k = 1, \dots, \rho \quad (5-14)$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij}^k \leq q_j^k \quad j \in Q_S \quad k = 1, \dots, \rho \quad (5-15)$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i^k x_{ij}^k \quad i \in P_S \quad k = 1, \dots, \rho \quad (5-16)$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j^k x_{ij}^k \quad j \in Q_S \quad k = 1, \dots, \rho \quad (5-17)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad i \in P_S \quad j \in Q_S \quad k = 1, \dots, \rho$$

Todas as variáveis e parâmetros aparecem com um índice  $k$  (ex:  $x_{ij}^k$ ) que indica o produto correspondente. A quantidade  $\rho$  representa o número de produtos no mercado.

### 5.3.2

#### Distribuição do Lucro

Nessa seção é apresentada a distribuição do lucro para o modelo com múltiplos produtos. A organização segue os padrões anteriores: primeiro é introduzido o problema dual e é apresentada a solução induzida pelas variáveis duais. Depois é provado que esta solução pertence ao núcleo.

Segue o modelo dual:

$$\mathcal{D}(S) : \text{Min} \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} p_i^k u_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} q_j^k v_j^k \quad (5-18)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i^k + v_j^k + c_i^k w_i^k - l_j^k t_j^k &\geq 0 & i \in P_S & \quad j \in Q_S \\ u_i^k &\geq 0 & i \in P_S & \\ v_j^k &\geq 0 & j \in Q_S & \\ w_i^k &\geq 1 & i \in P_S & \\ t_j^k &\geq 1 & j \in Q_S & \end{aligned} \quad (5-19)$$

A mudança em relação ao modelo básico está apenas em considerar os outros produtos, com isso a parcela dos produtores na função objetivo passa a ser  $\sum_i \sum_k u_i^k p_i^k$  e a dos consumidores é  $\sum_j \sum_k v_j^k q_j^k$ . As restrições do problema permaneceram iguais, apenas foram multiplicadas pelo número  $\rho$  de produtos.

O teorema a seguir mostra que a solução induzida pelas variáveis duais pertence ao núcleo deste jogo.

**Teorema 5.3** *Sejam  $(P, Q, p, q, c, l)$  os parâmetros do modelo e  $\mathcal{V}$  a função característica que define o jogo. Seja  $(u^*, v^*, w^*, t^*)$  a solução ótima do problema dual  $\mathcal{D}(N)$ .*

Então,  $\left( \sum_{k=1}^{\rho} u_1^{*k} p_1^{*k}, \dots, \sum_{k=1}^{\rho} u_n^{*k} p_n^{*k}; \sum_{k=1}^{\rho} v_1^{*k} q_1^{*k}, \dots, \sum_{k=1}^{\rho} v_m^{*k} q_m^{*k} \right)$  pertence ao núcleo do jogo  $C(\mathcal{V})$ .

PROVA: Como já foi dito, este jogo com  $\rho$  produtos é equivalente a  $\rho$  jogos básicos. E como não há qualquer ligação entre as restrições dos diferentes produtos, os argumentos para provar o núcleo do jogo básico seguem valendo neste caso.

Em suma, as restrições do problema permanecem independentes, portanto a solução  $(\sum_k u_1^{*k} p_1^{*k}, \dots, \sum_k u_n^{*k} p_n^{*k}; \sum_k v_1^{*k} q_1^{*k}, \dots, \sum_k v_m^{*k} q_m^{*k})$  é sempre válida para o problema. Sendo o dual, um problema de minimização é válido que:

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S)) \leq \sum_{i \in P_S} \sum_k u_i^{*k} p_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_k v_j^{*k} q_j^k$$

E o teorema é válido trivialmente.  $\square$

### 5.3.3 Análises

Nesta seção são feitas as análises das características desse jogo através de comentários sobre exemplos.

**JOGO 1 - *Variações Distintas para Cada Produto***: Este exemplo mostra como este jogo tem comportamento independente para cada produto, e como ele se comporta como se fossem jogos *básicos* distintos.

São 2 produtos no mercado, cada um com lances, ofertas e demandas distintos entre os jogadores. Foram feitas 10 rodadas variando 2 parâmetros no jogo (um para cada produto):

- A capacidade de produção do primeiro produto para o produtor **A** foi aumentada em 10 unidades por rodada.
- O lance do segundo produto para o consumidor **Z** foi diminuído em 2 unidades por rodada.

Seguem as tabelas com os dados:

Produtores				
Id	Ofertas		Lances	
	A	150	80	370
B	150	100	395	178
C	120	60	390	190

Tabela 5.12: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.12 contém a entrada de dados dos produtores para o JOGO 1. As colunas *Ofertas* e *Lances* tem duas colunas, uma para cada produto do leilão (esquerda para o produto 1, direita para o produto 2).

Consumidores				
Id	Demandas		Lances	
	Y	220	120	400
Z	230	100	410	197

Tabela 5.13: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.13 contém os dados de entrada do JOGO 1 para os consumidores. Sua organização segue os padrões da Tabela 5.12.

A Tabela 5.14 apresenta os resultados do jogo para os produtores. São apresentadas as *Quantidades Vendidas* e os *Preços Finais*. Cada produtor

(**A**, **B** e **C**) tem duas colunas de resultados: à esquerda são os dados do produto 1 e à direita os dados do produto 2.

A Tabela 5.15 apresenta os dados dos consumidores e tem organização semelhante.

Rodada	Quantidades Vendidas						Preços Finais					
#	A		B		C		A		B		C	
1	150	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
2	160	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
3	170	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
4	180	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
5	190	80	140	100	120	0	395	189	395	189	395	-
6	200	80	130	100	120	0	395	187	395	187	395	-
7	210	80	120	100	120	0	395	185	395	185	395	-
8	220	80	110	100	120	0	395	183	395	183	395	-
9	230	80	100	100	120	0	395	181	395	181	395	-
10	240	20	90	100	120	0	395	180	395	180	395	-

Tabela 5.14: Resultados para os produtores no JOGO 1.

Rodada	Quantidades Compradas				Preços Finais			
#	Y		Z		Y		Z	
1	190	120	230	100	400	190	400	190
2	200	120	230	100	400	190	400	190
3	210	120	230	100	400	190	400	190
4	220	120	230	100	400	190	400	190
5	220	120	230	60	395	189	395	189
6	220	120	230	60	395	187	395	187
7	220	120	230	60	395	185	395	185
8	220	120	230	60	395	183	395	183
9	220	120	230	60	395	181	395	181
10	220	120	230	0	395	180	395	-

Tabela 5.15: Resultados para os consumidores no JOGO 1.

O que pode ser visto pelos resultados é que de fato as mudanças associadas a um produto não interferem no outro. O mercado funciona como 2 leilões independentes.

Para o primeiro produto houve apenas uma mudança no preço, na 5<sup>a</sup> rodada, quando  $cap(U_p)$  passa a ser maior que  $cap(U_c)$ . Com isso, o preço passa de 400 (preço de **Y**) para 395 (preço de **B**).

Para o segundo produto, até a 4<sup>a</sup> rodada  $cap(U_p) > cap(U_c)$ , com isso o preço vigente era o de **C** (190). A partir da 5<sup>a</sup> rodada a relação entre as capacidades se inverteu e o preço passou a ser determinado pelo preço de **Z**.

O preço foi diminuindo a cada rodada (189 a 181) até que o consumidor **Z** deixou de vender, e o preço passou a ser determinado pelo produtor **A** (180).

### 5.3.4 Restrições de Acoplamento

Restrições de acoplamento são aquelas que unem sob uma regra mais de um produto do mercado. Nesta seção será estudado o que muda no comportamento do jogo a adição de uma restrição deste tipo no mercado.

A restrição adicionada é a mesma citada na seção 2.3.3: será estabelecida uma quantia máxima a ser gasta no mercado. Ao modelo apresentado na seção anterior basta adicionar este conjunto de restrições:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k \leq \theta_j \quad j \in Q_S \quad (5-20)$$

O modelo dual não fica muito diferente. A função objetivo passa a ser:

$$\mathcal{D}(S) : \text{Min} \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} p_i^k u_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} q_j^k v_j^k + \sum_{j \in Q_S} z_j \theta_j \quad (5-21)$$

E a restrição 5-19 passa a ser:

$$u_i^k + v_j^k + c_i^k w_i^k - l_j^k t_j^k + l_j^k z_j \geq 0 \quad i \in P_S \quad j \in Q_S \quad (5-22)$$

Onde  $z_j$  é a variável dual associada a restrição do  $j$ -ésimo consumidor.

Não será mostrado aqui, mas é razoável considerar que para este problema, a solução induzida pelas variáveis duais seja uma solução de núcleo. Todos os argumentos para provar os teoremas anteriores permanecem válidos.

### 5.3.5 Análises

Esta seção contém jogos semelhantes ao apresentado na seção 5.3.3, porém contendo a restrição da quantia máxima a ser gasta. Um jogo contém variáveis que contínuas e o outros contém variáveis inteiras.

JOGO 1 - *Jogo com Variáveis Contínuas*: Para este jogo as variáveis  $x_{ij}^k$  (as mercadorias em questão) podem assumir valores não inteiros. Além disso, o limite de gastos imposto que não é suficiente para que o consumidor supra toda a sua demanda por produtos. É claro que se o limite de gasto não for atingido, o problema se torna equivalente a uma formulação sem essa restrição.

Para esta análise é feita apenas uma rodada, pois ela será suficiente para mostrar as diferenças no comportamento deste jogo.

Seguem as tabelas de entrada de dados:

Produtores				
Id	Ofertas		Lances	
	A	150	80	370
B	150	100	395	178
C	120	60	390	190

Tabela 5.16: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.16 está organizada de maneira idêntica à da seção anterior.

Consumidores					
Id	Demandas		Lances		Limite
	Y	220	120	400	
Z	230	100	410	197	105100

Tabela 5.17: Dados de Entrada dos Consumidores para o JOGO 1.

A Tabela 5.17 contém os dados de entrada do JOGO 1 para os consumidores. Ela é praticamente idêntica à Tabela 5.13, com o acréscimo da coluna referente ao *Limite* de gastos.

As Tabelas 5.18 e 5.19 contém os resultados para esta instância do problema.

Produtores						
Id	Vendas		Retornos		Preços Finais	
	A	150	80	25	9.723	395
B	147.512	100	0	11.792	395	189.973
C	120	0	5	-	395	-

Tabela 5.18: Resultado dos Produtores para o JOGO 1.

Para a tabela 5.18, a coluna *Vendas* indica o total vendido pelo produtor correspondente (à esquerda, produto 1 e à direita, produto 2), a

coluna *Retorno* indica a parcela do lucro retornada ao produtor *por unidade de produto*. A coluna *Preços Finais* mostram o preço final de uma unidade do produto. O preço final considera o lance inicial e o retorno do sistema.

Nesta tabela já foi possível ver a maior consequência da inserção de uma restrição de acoplamento: a venda do produto 1 do produtor **B** não foi um número inteiro. Isto ocorreu pelo fato da restrição de gasto máximo não ter permitido a compra de uma unidade inteira do produto, portanto foi comprada uma fração dele.

Consumidores							
Id	Compras		Retorno 1		Retorno 2	Preços Finais	
Y	190	120	0	7.707	1250	395	189.973
Z	227.512	60	0	0	3845.121	395	189.973

Tabela 5.19: Resultado dos Consumidores para o JOGO 1.

Para a Tabela 5.19, a organização é semelhante à da 5.18. A diferença é que os *Retornos* estão divididos em 2 colunas. Isto acontece porque para os consumidores, a função objetivo (ou, o retorno do sistema) tem 2 contribuições distintas:

- $\sum_j \sum_k q_j^k v_j^k$  - associada às restrições de capacidade de consumo (*Retorno 1*).
- $\sum_j z_j \theta_j$  - associada às restrições de gasto máximo (*Retorno 2*).

As quantidades em *Retorno 1* são os retornos por *unidade de produto*, enquanto em *Retorno 2* são os retornos *absolutos* dados pelo sistema.

A razão desta diferença é que a contribuição  $\sum_j z_j \theta_j$  não discrimina os produtos. Portanto, não se sabe a princípio como esta quantia será dividida entre os produtos para formar o preço final da mercadoria.<sup>4</sup>

Para determinar o preço final, basta observar os produtores. Para eles não há indefinição. Seu preço final pode ser calculado normalmente já que sua parcela do lucro é bem definida para cada produto:

- $\sum_i \sum_k p_i^k u_i^k$  - associada as restrições de capacidade de produção.

Tendo o preço final determinado para os produtores, deve-se reparar que o Teorema 4.2 é válido nessa situação, portanto os preços finais são únicos para todos os integrantes do mercado.

<sup>4</sup>Vale lembrar que para o consumidor isto não faz diferença já que a quantia será creditada a ele de qualquer maneira. Porém, em certas ocasiões pode ser necessário calcular o preço da mercadoria.

Obviamente, com o preço final é possível determinar que parte do *Retorno 2* vai para qual produto. Por exemplo, dos 1250 dados ao consumidor **X**, 950 são para o produto 1 (para levar o preço a 395) e 300 são para o produto 2 (levando o preço a 189.973).

**JOGO 2 - Jogo com Variáveis Inteiras:** Este jogo é idêntico ao anterior a não ser pelo fato das variáveis do modelo serem inteiras. Esta diferença é muito importante pois com variáveis inteiras o modelo passa a lidar com itens indivisíveis.

A entrada do problema é igual a do jogo anterior (tab. 5.16 e 5.17). E as soluções estão apresentadas nas Tabelas 5.20 e 5.21.

Produtores						
Id	Vendas		Retornos		Preços Finais	
	A	150	80	40	17	410
B	147	100	0	19	395	197
C	120	1	10	0	400	190

Tabela 5.20: Resultado dos Produtores para o JOGO 2.

Consumidores							
Id	Compras		Retorno 1		Retorno 2	Preços Finais	
	Y	190	120	?	?	?	?
Z	227	61	?	?	?	?	?

Tabela 5.21: Resultado dos Consumidores para o JOGO 2.

Primeiramente esta solução, apesar de ser a ótima para o problema inteiro, não é a solução ótima para a sua relaxação linear. O valor da função objetivo para este jogo foi de 12332, enquanto que para sua relaxação linear foi de 12332.68293.

Este fato traz uma consequência imediata. A distribuição do lucro deixa de poder ser determinada pela solução do problema dual. Primeiramente porque a solução dual não é mais necessariamente igual a primal (premissa fundamental para as provas dos Teoremas de distribuição de lucro). Neste jogo, por exemplo existe um *gap de integralidade*, e portanto a solução ótima primal é menor que a dual. Conseqüentemente a distribuição do lucro não pode ser determinada pelas variáveis do problema dual, já que o lucro a ser dividido ( $\mathcal{L}(S)$ ) é menor que o total determinado pela solução dual ( $\mathcal{D}(S)$ ). Isto explica os sinais de '?' nas colunas *Retorno 1*, *Retorno 2* e *Preço Final*, uma vez que esses valores não puderam ser determinados para este jogo.

Sendo mais específico, havendo *gap de integralidade* já não é certo de que haja solução de núcleo para o jogo. Para muitos problemas, é  $\mathcal{NP}$ -*Completo* verificar se o núcleo é vazio ou não. Goemans e Skutella [13] provaram que este é o caso para o problema *Facility Location*, e um comportamento semelhante é esperado para o modelo em questão.

Como observação final vale dizer que esta instância pequena do EXEMPLO 2 levou praticamente 10 minutos para ser resolvida. Apesar do computador utilizado<sup>5</sup> ser rápido para os padrões atuais, o método de resolução foi muito simplista. Foi feito um *Branch & Bound* para a determinação do valor das variáveis inteiras. Foram resolvidos aproximadamente 120000 problemas lineares (mostrando que o número de *branches* foi grande, mesmo para uma instância tão pequena).

Este fato vem comprovar a necessidade de métodos eficientes para se resolver o problema inteiro. Estes métodos não foram desenvolvidos neste trabalho, mas são um bom tema para trabalhos futuros.

---

<sup>5</sup>PC Athlon 1 GHz, 256 Mb.

## 6 Escalabilidade

Na introdução desta dissertação, entre os objetivos citados, foi falado de flexibilidade e escalabilidade. Este modelo é fundamentalmente linear<sup>1</sup> e relativamente simples. Estas características permitem que ele seja resolvido em larga escala com bastante eficiência pelos resolvidores de programação linear modernos.

Neste capítulo são feitos alguns testes com instâncias grandes geradas automaticamente para testar a escalabilidade do modelo.

Segue o esquema dos testes:

- Foram geradas aleatoriamente 5 instâncias diferentes para cada rodada de teste, e foi tirada uma média dos tempos de execução da rodada.
- Foi contado o tempo total de execução incluindo o carregamento e montagem do modelo.
- Foi usado um PC Athlon 1 GHz com 256 Mb de memória, rodando Linux.
- O resolvidor de programação linear usado foi o **GLPK**<sup>2</sup>, um resolvidor gratuito consideravelmente mais simples e menos eficiente que resolvidores comerciais como o **CPLEX** [14] ou **XPRESS**.

Vale ressaltar que o objetivo real destes testes é de fazer medições de tempos absolutas, sem se preocupar com complexidade da implementação. O programa como um todo gasta quase todo o seu tempo resolvendo o modelo (os tempos de leitura e montagem do modelo são desprezíveis). O fato do modelo ser linear indica que ele pode ser resolvido em tempo polinomial.

---

<sup>1</sup>À exceção do caso especial com múltiplos produtos indivisíveis e restrição de acoplamento.

<sup>2</sup>Gnu Linear Programming Kit - <http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>

E, finalmente, não foram feitos testes com restrições de acoplamento e produtos indivisíveis, uma vez que não foram elaborados métodos eficientes para sua resolução.

TESTE 1: *Variação do número de participantes no jogo básico* - As variações no número de participantes deste teste foram feitas simultaneamente em produtores e consumidores. Esta variação proporciona um aumento quadrático no número de variáveis  $x_{ij}$ .

A Tabela 6.1 apresenta os resultados do TESTE 1. As colunas *Produtores* e *Consumidores* contêm o número de participantes de cada tipo nos testes. A coluna *Tempo* apresenta o tempo total de execução do programa em segundos.

Produtores	Consumidores	Tempo (s)
10	10	0.010
20	20	0.020
50	50	0.280
100	100	1.450
150	150	3.819
200	200	8.013
250	250	14.977
300	300	27.245
400	400	63.659
500	500	114.092
600	600	229.175

Tabela 6.1: Resultado do TESTE 1.

O que pode ser percebido por estes resultados é um crescimento aproximadamente cúbico do tempo em relação ao aumento de participantes. A Figura 6.1 apresenta o gráfico deste crescimento.

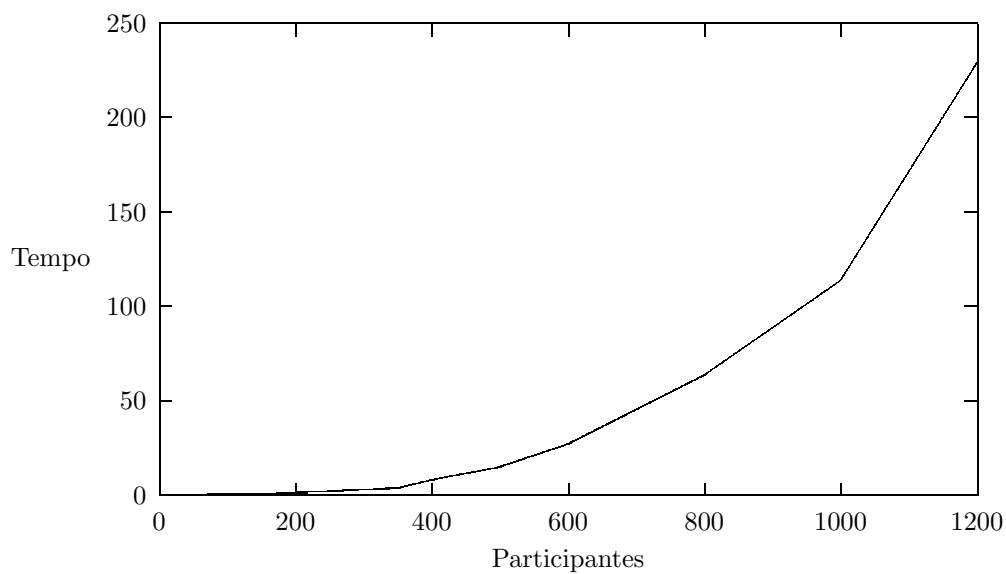


Figura 6.1: Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 1.

TESTE 2: *Número de participantes em jogo com custo de transporte* - Este teste repete o anterior adicionando o custo de transporte. O objetivo é verificar se ocorre algum aumento nos tempos para a resolução do problema.

Produtores	Consumidores	Tempo (s)
10	10	0.010
20	20	0.020
50	50	0.126
100	100	1.089
150	150	3.573
200	200	7.428
250	250	15.099
300	300	25.071
400	400	56.359
500	500	118.586
600	600	206.308

Tabela 6.2: Resultado do TESTE 2.

Como pode ser visto na Tabela 6.2 não houve qualquer aumento nos tempos de execução. Pelo contrário, houve uma pequena redução nos tempos. Isso pode ser devido a particularidade das instâncias testadas, ou porque os custos de transporte limitam um pouco mais a solução, tornando mais fácil sua resolução.

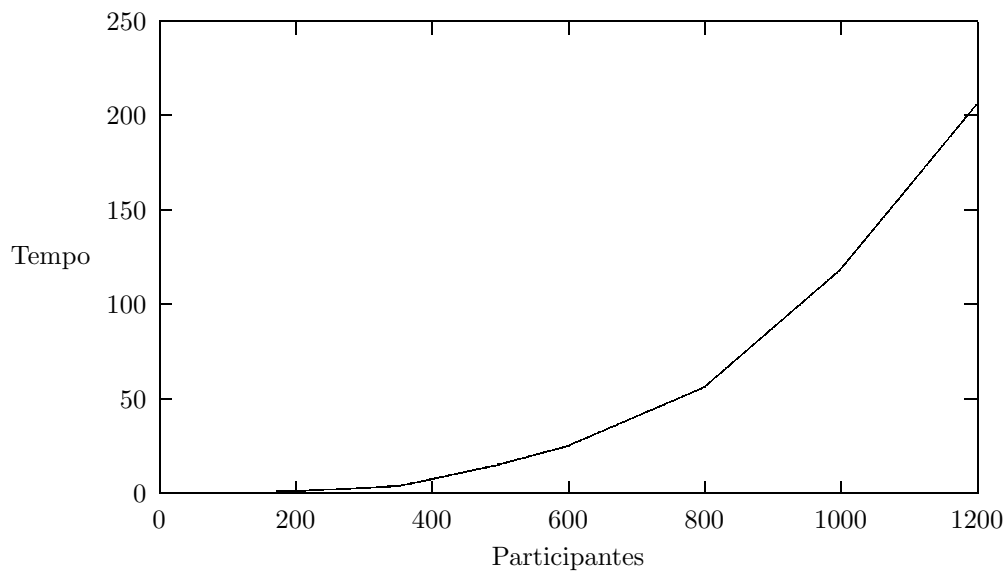


Figura 6.2: Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 2.

TESTE 3: *Número de participantes em jogo com economia de escala*  
 - Este teste repete o padrão dos anteriores adicionando economia de escala na oferta do consumidor. Mais um vez o objetivo é verificar como o tempo para a resolução do modelo aumenta com o número de participantes.

Produtores	Consumidores	Tempo (s)
10	10	0.010
20	20	0.026
50	50	0.290
100	100	2.798
150	150	9.052
200	200	22.754
250	250	40.760
300	300	71.600
400	400	211.682
500	500	363.843

Tabela 6.3: Resultado do TESTE 3.

Para este teste houve um aumento razoável nos tempos de resolução (que foram praticamente triplicados). A inserção da economia de escala aumenta o número de restrições na proporção das faixas de preço inseridas. Para este teste as faixas de preço foram fixadas em 3 por consumidor. Este aumento do número de restrições foi o responsável pelo aumento do tempo final de resolução. A Figura 6.3 apresenta o gráfico para estes dados.

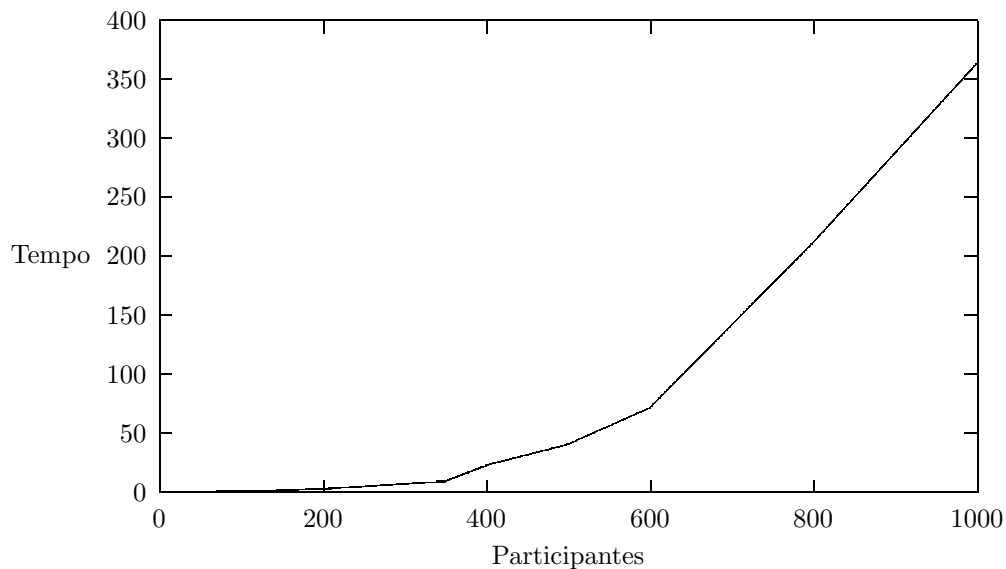


Figura 6.3: Gráfico Tempo x Participantes para o TESTE 3.

TESTE 4: *Número de produtos em jogo com múltiplos produtos* - Para este teste, foi fixado o número de produtores e consumidores ( $100 \times 100$ ) e foi variado o número de produtos no mercado. O objetivo é verificar a variação do tempo de execução com o número de produtos.

Produtores	Consumidores	Produtos	Tempo (s)
100	100	1	1.027
100	100	2	3.204
100	100	3	6.072
100	100	4	10.142
100	100	5	14.320
100	100	6	21.076
100	100	7	26.712
100	100	8	34.822
100	100	9	42.595
100	100	10	49.993

Tabela 6.4: Resultado do TESTE 4.

Pode ser verificado para este teste um aumento de tempo maior que linear e menor que quadrático em relação ao número de produtos. Embora haja aumento linear de variáveis e restrições, o que sugeriria um aumento linear do tempo, isto não aconteceu. Porém, este fato é dependente da implementação do resolvidor linear. O mais importante é notar que adicionar produtos ao mercado não causa grande impacto no tempo de resolução (o que já era esperado).

A Figura 6.4 apresenta o gráfico dos resultados do TESTE 4.

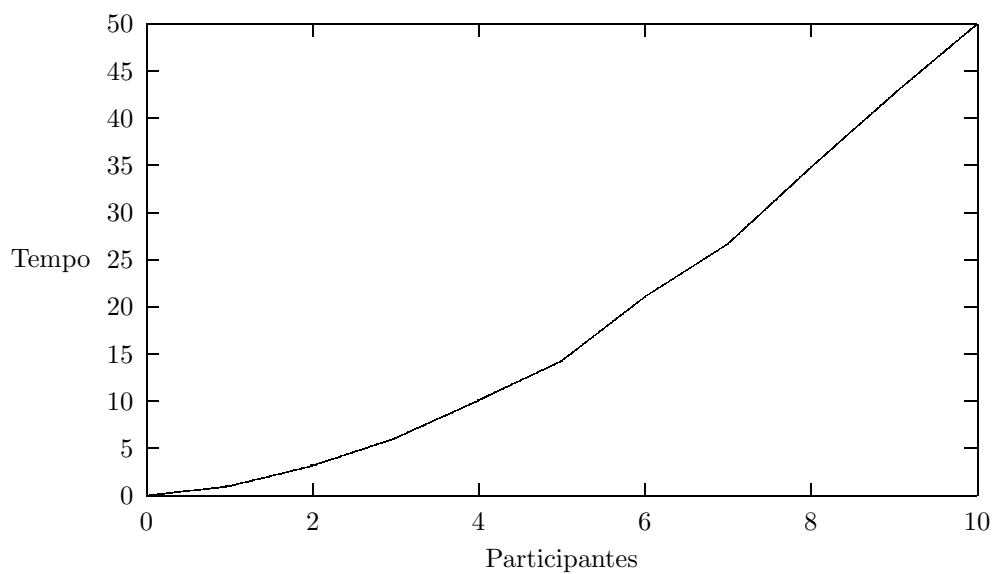


Figura 6.4: Gráfico Tempo x Produtos para o TESTE 4.

Os resultados dos testes comprovam a escalabilidade do modelo. Mesmo utilizando uma plataforma de baixo custo (PC, sistema operacional gratuito, resolvidor linear gratuito), foi possível resolver instâncias com centenas de participantes e com múltiplos produtos em questão de minutos.

## 7

### Conclusões e Trabalhos Futuros

As primeiras conclusões tiradas foram sobre as características do modelo básico. A distribuição de lucro proposta cumpriu com os objetivos primordiais do mercado: isto é, compradores que oferecem mais recebem compensações à altura de sua oferta. O mesmo acontecendo para produtores que cobram menos.

A condição imposta à esta distribuição, fazendo com que ela pertença ao núcleo do jogo associado ao modelo, é condição fundamental para que essa distribuição cumpra seus objetivos. Isto faz pensar sobre a natureza das soluções de núcleo para este jogo. Ela impõe à solução essa distribuição “proporcional” do lucro.

Ainda sobre o modelo básico, foi visto no *Teorema 4.2* que a distribuição impõe sempre que se tenha um preço final único para todos os participantes do mercado.

No *Teorema 4.3* foi visto como o preço final é determinado dadas as condições de oferta e demanda dos participantes do mercado. Foi feita uma analogia às conclusões de Shapley e Shubik [10] para Jogos de Atribuição (*Assignment Games*), e também com os princípios básicos da Macroeconomia.

É importante notar que estes teoremas permitem encontrar a solução de núcleo sem sequer resolver o problema de programação linear.

Para cada extensão sugerida, foi visto que existe núcleo e que a maneira de se chegar a essas soluções é semelhante a do jogo básico, isto é, através da solução do problema dual.

Para o jogo com custo de transporte foi visto que a propriedade de ter o preço final único não foi mantida, já que o custo de transporte pode variar entre os pares (*produtor, consumidor*), o que acaba gerando uma diferença no preço final dos participantes.

Porém, foi visto que a dinâmica da determinação do preço final foi mantida dadas as variações de oferta e demanda dos participantes.

Para o jogo com economia de escala, o comportamento se assemelha ao do jogo básico. O preço final único foi mantido e o comportamento frente à variação das capacidades dos participantes foi mantido. Porém, adequando-se às diferenças do novo modelo de cobrança.

Para o jogo com múltiplos produtos, quando não há restrições de acoplamento, o comportamento é idêntico ao do jogo com um produto. E ele funciona tal como múltiplos jogos de um produto.

Adicionando restrições de acoplamento, se os itens comercializados puderem ser vendidos em quantias fracionárias, o núcleo ainda pode ser determinado facilmente e as propriedades se mantêm.

Entretanto, se houver itens indivisíveis no mercado, o problema se torna mais complexo. Algumas propriedades para se encontrar solução de núcleo deixam de ser válidas. O modelo do leilão passa a ser de programação linear *inteira*, que requer métodos mais elaborados para sua resolução de maneira eficiente.

O modelo se mostrou suficientemente eficiente, podendo resolver em questão de minutos instâncias com centenas de participantes e múltiplos produtos. Esta característica é muito importante para a flexibilização do leilão, já que ele pode atuar em mercados variados e em larga escala.

Por fim, pode-se dizer que o modelo cumpre totalmente com seus objetivos. Ele apresenta grande flexibilidade, podendo ser utilizado sob os dois lados do comércio, apresentando extensões que podem ser usadas sem que haja mudanças em suas propriedades fundamentais. Apresenta o sistema de *compensações* cujo resultado é determinar o preço final da mercadoria de maneira diferenciada.

Alguns tópicos ficaram em aberto e podem ser temas de trabalhos futuros. Por exemplo, no que diz respeito à análise deste leilão:

- Existe estratégia dominante para este leilão? Qual?
- Como se comportam agentes reais neste leilão?
- Como os agentes se comportam, levando em consideração jogos repetitivos (isto é, eles passam a ter um “histórico” dos leilões anteriores)?

Ou, para o problema com restrições de acoplamento e produtos indivisíveis:

- Quando existe núcleo?
- Se existe, como é feita a distribuição do lucro?
- Elaboração de métodos eficientes de resolução.

## **Bibliografía**

- [1] VICKREY, D. **Counter Speculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders**. The Journal of Finance: 9-37, 1961
- [2] MILGROM, P. **Auctions and bidding: A primer**. Journal of Economic Perspectives, 3: 3-22, 1989.
- [3] MILGROM, P.; WEBER, R. J. **A Theory of Auctions and Competitive Bidding**. Econometrica Vol. 50-5: 1089-1122, 1982.
- [4] OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A Course in Game Theory**. MIT Press, 1994.
- [5] CURIEL, I. **Cooperative Game Theory And Applications**. Kluwer Academic Publishers.
- [6] VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. New York: John Wiley and Sons, 1944.
- [7] CHVATAL, V. **Linear Programming**. W H Freeman & Co, 1983.
- [8] LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. Addison-Wesley Pub Co, 1984.
- [9] BERTSIMAS, D; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to Linear Optimization**. Athena Scientific, 1997.
- [10] SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. **The assignment game: The core**. International Journal of Game Theory 1: 111-130, 1972.
- [11] SHAPLEY, L.S.; SHUBIK, M. **On market games**. Journal of Economic Theory 1, 9-25, 1969.
- [12] SÁNCHEZ-SORIANO, J.; LÓPEZ, M. A.; GARCÍA-JURADO, I. **On the core of transportation games**. Mathematical Social Sciences 41, 2001.

- [13] GOEMANS, M. X.; SKUTELLA, M. **Cooperative facility location games**. Proceedings of Soda 2000. 76-85.
- [14] ILOG. Using the CPLEX Callable Library Version 5, 1997.
- [15] WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. Wiley-Interscience, 1998.
- [16] BEVIÁ, C.; QUINZII, M.; SILVA, J. A. **Buying several indivisible goods**. Mathematical Social Sciences 37, 1999.
- [17] VOHRA, R. V.; DE VRIES, S. **Combinatorial Auctions: A Survey**. To appear at INFORMS Journal of Computing.