Math. Operationsforsch. u. Statist. **5** (1974), Heft 4/5, S. 281–293.

Eine Erweiterung der sogenannten Methode der zulässigen Richtungen der nichtlinearen Optimierung auf den Fall quasikonkaver Restriktionsfunktionen

A. Prékopa

Technische Universität Budapest, Budapest, XI. Stoczek u. 2–4
und
Institut für Rechentechnik und Automatisierung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, I. Uri u. 49, Ungarn.

Eingereicht bei der Redaktion: 19. 6. 1973

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beweisen wir die Konvergenz der Methode der zulässigen Richtungen für den Fall quasikonkaver Restriktionsfunktionen. Unsere Ergebnisse haben wir schon in einem englischsprachigen Artikel [2] publiziert, jedoch in Verbindung mit einer speziellen Aufgabe der stochastischen Optimierung, während unsere jetzige Arbeit die Aufgabe allgemein untersucht.

Abstract

In the paper we prove the convergence of the method of feasible directions for the case of quasi-concave constraining functions. These results were already published but in a shorter form and amalgamated with a stochastic programming problem. Here we give a detailed and a more general treatment of the earlier results.

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird die sogenannte Methode der zulässigen Richtungen von Zoutendijk (siehe [4], Seite 74, Verfahren P 2) auf den Fall erweitert, wenn die Funktionen der Nebenbedingungen nicht unbedingt konkav sind, sondern nur quasikonkav. Dabei verstehen wir in erster Linie unter Erweiterung, daß wir die Konvergenz des ursprünglichen Verfahrens für den allgemeineren Fall bei quasikonkaven Funktionen in den Nebenbedingungen beweisen. Auch unsere anderen, hauptsächlich analytischen Charakter besitzenden Voraussetzungen weichen von den ursprünglichen ab, und zusammen mit der Quasikonkavität der Restriktionsfunktionen bedeuten sie einen allgemeineren Fall.

Die in der Arbeit enthaltenen Resultate haben wir schon früher veröffentlicht [2], doch in kürzerer Form und in Verbindung mit einer speziellen Aufgabe der stochastischen Optimierung.

Wir beabsichtigen nicht, die in unserer Arbeit aufgeführten Lemmata, Hilfssätze und Überlegungen sorgfältig mit denen früherer Arbeiten zu vergleichen, zum Teil deshalb, weil der wesentliche Teil der benutzten Überlegungen einen folkloristischen Charakter trägt und deshalb ein reales Bild nicht gegeben werden kann. Wir bemerken jedoch, daß wir viel aus der Arbeit von Zoutendijk [4] entnommen haben. Wir beschäftigen uns mit der Lösung der folgenden nichtlinearen Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{x}) &\geq p_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{a}_i'\mathbf{x} &\geq b_i, \qquad i = 1, \dots, M, \\ \min f&(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Falls für den Vektor $\mathbf{x}$ eine Nichtnegativitätsbedingung vorliegt, denken wir uns diese in das lineare Ungleichungssystem mit eingefügt. In Verbindung mit der Aufgabe (1.1) führen wir die folgenden Voraussetzungen ein:

V_1. Die Funktionen $G_1(\mathbf{x}), \dots, G_m(\mathbf{x})$ sind auf der Abschließung $\overline{K}$ einer konvexen, offenen Menge K definiert, wo jede Funktion $G_i(\mathbf{x})$ nach jeder Variablen stetig differenzierbar ist.

V_2 Wenn $\mathbf{x} \in \overline{K}$ und der Vektor $\mathbf{x}$ genügt den insgesamt $m + M$ Nebenbedingungen der Aufgabe (1.1), dann ist $\mathbf{x}$ ein innerer Punkt der Menge $\overline{K}$ das heißt $\mathbf{x} \in K$. Die, durch die Nebenbedingungen der Aufgabe (1.1) bestimmte Menge wird mit D bezeichnet. Offensichtlich ist D eine abgeschlossene Menge. Vom 3. Abschnitt an setzen wir voraus, daß das durch die linearen Nebenbedingungen der zweiten Zeile in (1.1) bestimmte, konvexe Polyeder beschränkt ist.

V_3. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ sei über einer solchen offenen konvexen Menge H definert, die die Menge D enthält, und wir setzen voraus, daß von $f(\mathbf{x})$ die partielle Ableitung nach jeder Variablen existiert und stetig ist in H.

V_4. Für jedes $\mathbf{x} \in D$, mit

$$G_i(\mathbf{x}) = p_i, \qquad i \in I_0 \subset \{1, \dots, m\}, \tag{1.2}$$

kann man ein $\mathbf{y} \in D$ finden, so daß (der Gradient wird immer als Zeilenvektor betrachtet)

$$\nabla G_i(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) > 0, \qquad i \in I_0. \tag{1.3}$$

Diese Voraussetzung ist analog zu der in der konvexen Optimierung benutzten Slater-Bedingung.

V_5. Die Funktionen $G_1(\mathbf{x}), \dots, G_m(\mathbf{x})$ sind quasikonkav in $\overline{K}$, während $f(\mathbf{x})$ im eigenen Definitionsbereich H konvex ist.

Im Zusammenhang mit der Voraussetzung V_1 kann die Frage auftauchen, warum wir die Funktionen $G_1(\mathbf{x}), \dots, G_m(\mathbf{x})$ über der Abschließung einer offenen Menge definieren. Die Offenheit der Menge wird im Interesse der Deutung der Differenzierbarkeit benötigt, deren Abschließung dagegen deshalb, weil wir sonst nicht sicher sind, daß die Nebenbedingungen der Aufgabe (1.1) allein die Menge D bestimmen, und daß dies nicht auf solch eine Art geschieht, daß teilweise durch die $m+M$ Nebenbedingungen allein und teilweise dagegen mit der Bedingung $\mathbf{x} \in K$ zusammen die Menge der zulässigen Lösungen festgelegt wird. So kann dies nicht auftreten. Eine Schwierigkeit könnte sich daraus ergeben, daß die Abgeschlossenheit der Menge D fraglich ist. Dies ist jedoch vom Standpunkt der weiteren Überlegungen aus unentbehrlich.

In Verbindung mit der Voraussetzung V_4 bemerken wir: Da für jede zulässige Lösung $\mathbf{y}$

$$G_i(\mathbf{y}) \geq p_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

gilt, ergibt sich, wenn $\mathbf{x}$ den Bedingungen in (1.2) genügt, für $0 < t \leq 1$

$$G_i(\mathbf{y}) = G_i(\mathbf{x}) + \nabla G_i(\mathbf{x} + \vartheta t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))t(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq p_i, \qquad i \in I_0, \tag{1.5}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$, woraus wir erhalten, daß

$$\nabla G_i(\mathbf{x} + \vartheta t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0, \qquad i \in I_0. \tag{1.6}$$

Führen wir den Grenzübergang $t \to 0$ durch, so bekommen wir die Relation

$$\nabla G_i(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0, \qquad i \in I_0. \tag{1.7}$$

Hier haben wir ausgenutzt, daß die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ebenfalls zu D gehört, dies sichert aber die Voraussetzung V_5. Die Ungleichung (1.7) ist folglich für jedes $\mathbf{y} \in D$ erfüllt, dazu wird durch die Vorausetzung V_4 eine schärfere Form verlangt. Die Voraussetzungen V_1–V_5 werden in der ganzen Arbeit stillschweigend als erfüllt betrachtet.

2 Vorbereitende Lemmata

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} I_C &= \{1, \ldots, m\}, \\ I_C(\mathbf{x}) &= \{i : i \in I_C,\ G_i(\mathbf{x}) = p_i\}, \qquad && \mathbf{x} \in D, \\ I_L &= \{1, \ldots, M\}, \\ I_L(\mathbf{x}) &= \{i : i \in I_L,\ \mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i\}, && \mathbf{x} \in D. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lemma 1 *Sei $\mathbf{x} \in D$ und seien v_i, $i \in I_C(\mathbf{x})$, u_i, $i \in I_L(\mathbf{x})$, solche nichtnegativen Zahlen, für die die folgende Gleichung gilt*

$$\sum_{i \in I_C(\mathbf{x})} v_i \nabla G_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I_L(\mathbf{x})} u_i \mathbf{a}_i' = \mathbf{0}'. \tag{2.2}$$

Dann ist $v_i = 0$, $i \in I_C(\mathbf{x})$.

Beweis: Sei $\mathbf{y} \in D$ ein Vektor, der für den gegebenen Vektor $\mathbf{x}$ der Voraussetzung V_4 genügt. Wir multiplizieren beide Seiten von (2.2) skalar mit dem Vektor $(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I_C(\mathbf{x})} v_i \nabla G_i(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \sum_{i \in I_L(\mathbf{x})} u_i \mathbf{a}_i'(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ &\geq \sum_{i \in I_C(\mathbf{x})} v_i \nabla G_i(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Da die untere Reihe eine Summe von nichtnegativen Summanden ist, erhalten wir

$$v_i \nabla G_i(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}). \tag{2.4}$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichung (1.3) folgt hieraus sofort die Behauptung des Lemmas. Die beim Satz von KUHN–TUCKER benutzte Regularitätsbedingung (constraint qualification) besteht darin, daß zu einem gegebenen $\mathbf{x} \in D$ und jedem Vektor $\mathbf{h}$, der den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \nabla G_i(\mathbf{x})\mathbf{h} &\geq 0, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}),\\ \mathbf{a}_i'\mathbf{h} &\geq 0, \qquad i \in I_L(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

genügt, ein solcher differenzierbarer Kurvenbogen $\boldsymbol{\psi}(t)$, $0 \leq t \leq T$, $T > 0$ existiert, der ganz in D verläuft, so daß gilt

$$\begin{aligned} G_i(\boldsymbol{\psi}(t)) &\geq \mathbf{p}_i, \qquad i \in I_C,\\ \mathbf{a}_i'(\boldsymbol{\psi}(t)) &\geq b_i, \qquad i \in I_L, \end{aligned} \tag{2.6}$$

und für den die Tangentenrichtung im Punkt $t = 0$ mit $\mathbf{h}$-übereinstimmt, d.h.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}(t)\right|_{t=0} = \mathbf{h}. \tag{2.7}$$

Hier können von den Indexmengen $I_C(\mathbf{x})$ und $I_L(\mathbf{x})$ eine oder auch beide leer sein. Wenn $\mathbf{x}$ ein innerer Punkt aus D ist, dann ist für hinreichend kleine t-Werte

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{h} \tag{2.8}$$

enthalten in D. Dieses $\boldsymbol{\psi}(t)$ genügt trivalerweise der Bedingung (2.7). □

LEMMA 2 *Für jedes* $\mathbf{x} \in D$ *ist die Regularitätsbedingung von* KUHN *und* TUCKER *erfüllt.*

Beweis: Es ist ausreichend, nur den Fall zu betrachten, wenn wenigstens eine der Mengen $I_C(\mathbf{x})$, $I_L(\mathbf{x})$ nicht leer ist. Sei $\mathbf{h}$ ein Vektor, der den Bedingungen (2.4) genügt. Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{x} + t[\mathbf{h} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})], \qquad t \geq 0, \tag{2.9}$$

wobei $\mathbf{y} \in D$ den Forderungen der Voraussetzung V_4 für den Fall $I_0 = I_C(\mathbf{x})$ genügt. Über $I_C(\mathbf{x})$ nehmen wir an, daß sie nicht leer ist. Sei $i \in I_C(\mathbf{x})$. Die oberen Ungleichungen in (2.4) und die Ungleichungen in (1.3) bedingen für $t > 0$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$\nabla G_i(\mathbf{x})t[\mathbf{h} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})] \geq 0. \tag{2.10}$$

Damit ergibt sich jedoch für hinreichend kleine Werte von t

$$\begin{aligned} &G_i(\mathbf{x} + t[\mathbf{h} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})]) - G_i(\mathbf{x})\\ &\quad = \nabla G_i(\mathbf{x} + \vartheta t[\mathbf{h} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})])t[\mathbf{h} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x})] \geq 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Es existiert folglich ein $T > 0$ mit

$$G_i(\boldsymbol{\psi}(t)) \geq p_i, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}). \tag{2.12}$$

Was die linearen Nebenbedingungen betrifft, so sind diese auf die folgende Weise erfüllbar. Ist $i \in I_L(\mathbf{x})$ (nehmen wir jetzt an, daß $I_L(\mathbf{x})$ nicht leer ist), so gilt für jedes $t > 0$

$$\mathbf{a}_i' \boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{a}_i'\mathbf{x} + t\mathbf{a}_i'\mathbf{h} + t^2\mathbf{a}_i'(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq \mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i. \tag{2.13}$$

Demzufolge gilt $\boldsymbol{\psi}(t) \in D$ für hinreichend kleine Werte von t (die als echte Ungleichungen erfüllten Nebenbedingungen bleiben für kleine Werte von t durch $\boldsymbol{\psi}(t)$ ebenfalls erfüllt). Schließlich bemerken wir noch, daß unsere jetzige Funktion $\boldsymbol{\psi}(t)$ trivialerweise der Bedingung (2.7) genügt, und damit haben wir das Lemma bewiesen.

Einen Vektor $\mathbf{x}^*$ nennen wir eine *optimale Lösung der Aufgabe* (1.1), wenn $\mathbf{x}^* \in D$ und für jedes $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$$

gilt.

Der Kuhn–Tucker-Satz gibt eine notwendige Bedingung dafür an, daß ein gegebener Vektor $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung eines nichtlinearen Optimierungproblems ist. Auf der Grundlage der im 1. Abschnitt aufgeführten Voraussetzungen und des in diesem Abschnitt bewiesenen (aus den Voraussetzungen des 1. Abschnittes hergeleiteten) Lemmas 2 gilt die folgende Aussage (zum Beweis siehe Abschnitt 1 in [3]): *Ist $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung der Aufgabe* (1.1)*, dann existieren Zahlen*

$$\begin{array}{c} \lambda_1^* \geq 0, \ldots, \lambda_m^* \geq 0, \\ \mu_1^* \geq 0, \ldots, \mu_m^* \geq 0, \end{array} \tag{2.14}$$

so daß

$$\begin{gathered} -\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla G_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i^* \mathbf{a}_i' = \mathbf{0}', \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [G_i(\mathbf{x}^*) - p_i] + \sum_{i=1}^{M} \mu_i^* [\mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* - b_i] = 0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

gilt. Der durch die Gleichungen (2.15) ausgedrückte Kuhn–Tucker-Satz ist auch ohne die Voraussetzung V_5 gültig, aber wir fordern, daß die in diesem Abschnitt erwähnte Regularitätsbedingung (constraint qualification) erfüllt sind. Zum Beweis der Gültigkeit der Regularitätsbedingung benutzen wir die Konvexität der Menge D, die aber eine Folgerung aus der Voraussetzung V_5 ist.

Unser folgendes Lemma enthält eine spezielle Anwendung der Resultate von Arrow und Enthoven auf unser Problem.

Lemma 3 *Wenn im Punkt $\mathbf{x}^* \in D$ die Bedingungen* (2.15) *erfüllt sind, wobei die Zahlen λ_i^*, μ_i^* den Forderungen in* (2.14) *genügen, dann ist $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung der Aufgabe* (1.1).

Beweis: Sei $\mathbf{x} \in D$ ein beliebiger Punkt. Wir multiplizieren die obere Reihe in (2.15) skalar mit dem Vektor $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla G_i(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i^* \mathbf{a}_i'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &= -\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I_C(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* \nabla G_i(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I_L(\mathbf{x}^*)} \mu_i^* \mathbf{a}_i'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &\geq -\nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Da $f(\mathbf{x})$ über der Menge $H \supset D$ konvex ist, folgt

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \tag{2.17}$$

Aus der Relation (2.16) haben wir erhalten; daß

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)[\mathbf{x} - \mathbf{x}^*] \geq 0 \tag{2.18}$$

ist. Unter Berücksichtigung von (2.18) ergibt sich aus (2.17) sofort die Ungleichung

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \qquad x \in D, \tag{2.19}$$

d. h., der Vektor $\mathbf{x}^* \in D$ ist optimal. Damit haben wir das Lemma 3 bewiesen. □

3 Algorithmus zur Lösung der Aufgabe (1.1)

Unser Lösungsalgorithmus stimmt formal mit dem von Zoutendijk eingeführten Algorithm überein. Wie wir erwähnten, handelt es sich um den Algorithmus P 2 in [4] auf Seite 74. Jedoch wenden wir diesen auf eine allgemeinere Kategorie von Funktionen an, und zwar für den Fall quasikonkaver Restriktionsfunktionen an Stelle von konkaven Funktionen. Andererseits sind bezüglich der Funktionen auch unsere Regularitätsforderungen speziell, schwächer und weichen von den vorher benutzten ab.

Das Verfahren ist ein unendlichstufiger Algorithmus, bei dem in jedem Schritt ein lineares Optimierungsproblem zu lösen ist, und die so erhaltene Folge von optimalen Werten gegen den Optimalwert der Aufgabe (1.1) konvergiert. Von den optimalen Lösungen fordern wir nicht die Konvergenz.

Wir beginnen mit einem beliebigen Vektor $\mathbf{x}_1 \in D$. Nehmen wir an, daß wir die Folge $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ von Elementen aus D schon konstruiert haben. Wir geben an, wie der Vektor $\mathbf{x}_{k+1}$ bestimmt wird. Wir betrachten das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} G_i(\mathbf{x}_k) + \nabla G_i(\mathbf{x}_k)[\mathbf{x} - \mathbf{x}_k] + \vartheta_i y \geq p_i, & i \in I_C, \\ \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i, & i \in I_L, \\ \nabla f(\mathbf{x}_k)[\mathbf{x} - \mathbf{x}_k] \leq y, & \\ \min y, & \end{array} \tag{3.1}$$

wobei auch die später vorkommenden ϑ_i während des ganzen Verfahrens feste, jedoch positive Zahlen sind. Wenn $\mathbf{x}$ n-dimensional ist, ist der Variablenvektor in der Aufgabe (3.1) $n+1$-dimensional. Es kommt nämlich eine neue Variable y in die Aufgabe hinein.

Nach Voraussetzung bestimmen die linearen Nebenbedingungen der Aufgabe (1.1) ein beschränktes konvexes Polyeder (konvexes Polytop). Deshalb ist für jeden festen Wert von y die den Nebenbedingungen der Aufgabe (3.1) genügende $\mathbf{x}$-Menge beschränkt. Daher ist y, die Zielfunktion, von unten beschränkt, und somit besitzt die Aufgabe ein endliches Optimum und eine optimale Lösung. Wir bemerken, daß die den Nebenbedingungen der Aufgabe (3.1) genügende, $(\mathbf{x}, y)$-Menge nicht leer ist, weil sie zum Beispiel den Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, $y = 0$ enthält.

Wir lösen die lineare Optimierungsaufgabe (3.1). Danach überprüfen wir, ob $\mathbf{x}_k$, $y = 0$ eine optimale Lösung der Aufgabe (3.1) ist oder nicht. Im ersteren Fall ist das gesamte Verfahren zur Lösung der Aufgabe (1.1) damit beendet. Später werden wir zeigen, weshalb das so ist. Wenn $\mathbf{x}_k$, $y = 0$ keine optimale Lösung der Aufgabe (3.1) ist, dann betrachten wir die folgende Halbgerade:

$$\mathbf{x}_k + \lambda(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k), \qquad \lambda \geq 0. \tag{3.2}$$

Dabei ist $\mathbf{x}_k^*$ eine optimale Lösung der Aufgabe (3.1). Wir minimieren die Funktion $f(\mathbf{x})$ über dem Durchschnitt dieser Halbgeraden mit der Menge D der zulässigen Lösungen der Aufgabe (1.1), die ein endliches, abgeschlossenes Intervall darstellt.

Mit anderen Worten, wenn μ_k das größte λ ist, für welches

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{x}_k + \lambda(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k)) &\geq p_i, \qquad i \in I_C, \\ \mathbf{a}_i'(\mathbf{x}_k + \lambda(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k)) &\geq b_i, \qquad i \in I_L \end{aligned} \tag{3.3}$$

gilt, dann bestimmen wir den Wert λ_k, für den

$$f(\mathbf{x}_k + \lambda(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k)) \geq f(\mathbf{x}_k + \lambda_k(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k)) \quad \text{für} \quad 0 \leq \lambda \leq \mu_k \tag{3.4}$$

ist und berechnen danach $\mathbf{x}_{k+1}$ aus der Gleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k). \tag{3.5}$$

Wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, $y = 0$ eine optimale Lösung von (3.1) ist, dann ist $\mathbf{x}_k$ eine optimale Lösung der Aufgabe (1.1). Dies werden wir gleich beweisen. Tritt dieser Fall für kein k ein, so ist das Verfahren unendlich, und im 5. Abschnitt zeigen wir später, daß

$$\lim_{k \to \infty} f(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

gilt.

SATZ 1 *Das Optimum der Aufgabe* (3.1) *ist* (y_{opt}) *gleich Null genau dann, wenn* $\mathbf{x}_k$ *eine optimale Lösung der Aufgabe* (1.1) *ist.*

Beweis: Nehmen wir an, daß $y_{\text{opt}} = 0$ ist. Dann gilt für jeden Vektor $(\mathbf{x}, y)$, der den Nebenbedingungen der Aufgabe (3.1) genügt, $y \geq 0$. Wir betrachten jene $G_i(\mathbf{x}) = p_i$ Nebenbedingungen, welche für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ als Gleichungen erfüllt sind. Die entsprechenden Indizes bilden die Indexmenge $I_C(\mathbf{x}_k)$. Das lineare homogene Ungleichungssystem mit insgesamt $n + 1$ Variablen

$$\begin{aligned} &\nabla G_i(\mathbf{x}_k)\mathbf{z} + \vartheta_i y \geq 0, &&i \in I_C(\mathbf{x}_k), \\ &\mathbf{a}_i'\mathbf{z} \geq 0, &&i \in I_L(\mathbf{x}_k), \\ &-\nabla f(\mathbf{x}_k)\mathbf{z} + \quad y \geq 0, && \end{aligned} \tag{3.7}$$

bedingt dann die lineare Ungleichung

$$y \geq 0. \tag{3.8}$$

Wenn es nämlich ein $(\mathbf{z}, y)$ gäbe, so daß (3.7) erfüllt und $y < 0$ ist, dann wäre (3.7) wegen der Homogenität auch für $(t\mathbf{z}, ty)$ für jedes positive t erfüllt. Sei t eine so kleine positive Zahl, daß in der Aufgabe (3.1) die für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, $y = 0$ inaktiven Nebenbedingungen (die Nebenbedingungen, für die $i \notin I_C(\mathbf{x}_k)$, $i \notin I_L(\mathbf{x}_k)$, das heißt die als echte Ungleichungen erfüllt sind) für den Vektor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ y \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ebenfalls erfüllt sind. Da dann der Vektor (3.9) für hinreichend kleines $t > 0$ jeder Nebenbedingung in (3.1) genügt und die letzte Komponente negativ ist, kann y_{opt} nicht gleich Null sein. Das heißt, (3.8) ist tatsächlich eine Folgerung aus dem linearen Ungleichungssystem (3.7). Nach dem Satz von Farkas ist dann der Gradient der linken Seite von (3.8) eine Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten der Gradienten der linken Seite von (3.7). Es existieren also Zahlen

$$\begin{aligned} v_i &\geq 0, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}_k), \\ u_i &\geq 0, \qquad i \in I_L(\mathbf{x}_k), \\ w &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

so daß

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_C(\mathbf{x}_k)} v_i \nabla G_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{i \in I_L(\mathbf{x}_k)} u_i \mathbf{a}_i' - w \nabla f(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{0}', \\ \sum_{i \in I_C(\mathbf{x}_k)} v_i \vartheta_i + w &= 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

gilt. Hier ist der Fall $w = 0$ nicht möglich, da dann nach dem Lemma 1 aus dem 2. Abschnitt folgen würde, daß

$$v_i = 0, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}_k),$$

ist, was aber ein Widerspruch zur zweiten Zeile in (3.11) ist. Teilen wir die erste Gleichung in (3.11) durch $w > 0$, so erhalten wir, daß der Vektor $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_k$ zusammen mit den Zahlen

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= \frac{v_i}{w}, \qquad i \in I_C(\mathbf{x}_k), \\ \lambda_i^* &= 0, \qquad i \in I_C - I_C(\mathbf{x}_k), \\ \mu_i^* &= \frac{u_i}{w}, \qquad i \in I_L(\mathbf{x}_k), \\ \mu_i^* &= 0, \qquad i \in I_L - I_L(\mathbf{x}_k), \end{aligned} \tag{3.12}$$

den sogenannten Kuhn–Tucker-Bedingungen in (2.15) genügt. Damit ist nach dem Lemma 3 des vorigen Abschnittes $\mathbf{x}_k$ eine optimale Lösung der Aufgabe (1.1).

Wir nehmen nun an, daß $\mathbf{x}_k$ eine optimale Lösung der Aufgabe (1.1) ist. Dann sind die Kuhn–Tucker-Bedingungen (2.15) für den Vektor $\mathbf{x}_k$ erfüllt. Daraus folgt, daß die Gleichungen in (3.11) mit nichtnegativen Zahlen u_i, v_i, w erfüllt sind. Dabei ist $v_i = 0$ falls $G_i(\mathbf{x}_k) > p_i$ und $u_i = 0$ falls $\mathbf{a}_i'\mathbf{x}_k > b_i$. Demzufolge ist die lineare Ungleichung (3.8) eine Folgerung der linearen Ungleichungen in (3.7). Daraus folgt jedoch $y_{\mathrm{opt}} > 0$ in der linearen Optimierungsaufgabe (3.1). Da jedoch $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, $y = 0$ eine zulässige Lösung der Aufgabe (3.1) ist, gilt deshalb $y_{\mathrm{opt}} = 0$. Damit haben wir diesen Satz vollständig bewiesen. □

4 Hilfssätze zum Beweis der Konvergenz des Verfahrens

In diesem Abschnitt werden wir zwei Hilfssätze beweisen. Unsere Bezeichnungen sind unabhängig von den benutzten Bezeichnungen in den anderen Abschnitten. Sei K eine beschränkte, abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^n$, $F(\mathbf{x})$ sei über einer, die Menge K enthaltenden, offenen Menge definiert. Wir setzen voraus, daß die Funktion $F(\mathbf{x})$ über ihrem Definitionsbereich einen stetigen Gradienten besitzt.

Hilfssatz 1 *Sei $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ eine Folge von Vektoren aus K und $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots$ eine beschränkte Vektorfolge. Sei weiterhin $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, und nehmen wir an, daß*

$$\mathbf{y}_k + \gamma \mathbf{t}_k \in K, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

gilt, sowie, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß

$$\nabla F(\mathbf{y}_k)\mathbf{t}_k \geq \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

erfüllt ist. Sei $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Weiterhin nehmen wir noch an, daß

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0 \tag{4.3}$$

erfüllt ist. Wir behaupten, daß mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Indizes k die Ungleichung

$$\nabla F(\mathbf{y}_k + \gamma \mathbf{t}_k)\mathbf{t}_k \geq \varepsilon_1, \qquad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k \tag{4.4}$$

gilt.

Beweis: Im Widerspruch zu der Relation (4.4) nehmen wir an, daß für unendlich viele Indizes k

$$F(\mathbf{y}_k + \gamma'_k \mathbf{t}_k)\mathbf{t}_k < \varepsilon_1 \tag{4.5}$$

für gewisse Zahlen $0 < \gamma'_k \leq \gamma_k$ gilt.

Aus der Kombination der Relationen (4.2) und (4.5) erhalten wir für unendlich viele Indizes k

$$[\nabla F(\mathbf{y}_k) - \nabla F(\mathbf{y}_k + \gamma'_k \mathbf{t}_k)]\mathbf{t}_k \geq \varepsilon - \varepsilon_1 > 0. \tag{4.6}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Da die Folge $\mathbf{t}_k$ beschränkt ist, $y'_k \to 0$ für $k \to \infty$ muß folglich wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\nabla F(\mathbf{x})$ die linke Seite in (4.6) für $k \to \infty$ gegen Null streben. Damit haben wir den Satz bewiesen. $\square$

Hilfssatz 2 *Sei $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ eine Folge von Elementen aus K, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots$ eine beschränkte Vektorfolge, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, wobei*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.7}$$

gilt. Wir nehmen

$$\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{s}_k \in K, \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

und weiterhin

$$F(\mathbf{x}_{k+1}) = F(\mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k) \geq F(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{s}_k), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

an. Seien $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots; \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *durch Auswahl gleichindizierter Glieder erhaltene Teilfolgen der vorherigen Folgen. Sei* $\varepsilon > 0$*, und nehmen wir*

$$\nabla F(\mathbf{y}_i)\mathbf{t}_i \geq \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{4.9}$$

an. Wir behaupten, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty. \tag{4.10}$$

gilt.

Beweis: Wir betrachten einen festen Index i. Sei k derjenige Index, für den $x_k = y_i$ gilt. Durch Anwendung der Ungleichung (4.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_1) &= \sum_{j=1}^{k} [F(\mathbf{x}_{j+1}) - F(\mathbf{x}_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{k} [F(\mathbf{x}_j + \lambda_j \mathbf{s}_j) - F(\mathbf{x}_j)] \\ &\geq \sum_{r=1}^{i} [F(\mathbf{y}_r + \gamma_r \mathbf{t}_r) - F(\mathbf{y}_r)] \\ &\geq \sum_{r=1}^{i} [F(\mathbf{y}_r + \gamma'_r \mathbf{t}_r) - F(\mathbf{y}_r)], \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei γ'_r das größte γ ist, welches den folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} &\gamma \leq \gamma_r, \\ &\nabla F(\mathbf{y}_r + \gamma \mathbf{t}_r)\mathbf{t}_r \geq \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

mit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Weiterhin erhalten wir aus der Relation (4.11)

$$\sum_{r=1}^{i} [F(\mathbf{y}_r + \gamma'_r \mathbf{t}_r) - F(\mathbf{y}_r)] = \sum_{r=1}^{i} \nabla F(\mathbf{y}_r + h_r \gamma'_r \mathbf{t}_r)\gamma'_r \mathbf{t}_r \geq \varepsilon_1 \sum_{r=1}^{i} \gamma'_r, \tag{4.13}$$

wobei $0 < h_r < 1$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} \gamma'_r < \infty. \tag{4.14}$$

Wir zeigen, daß mit Ausnahme von höchstens endlich vieler Indizes $\gamma_r = \gamma'_r$ gilt. Wenn $\gamma'_r < \gamma_r$ für einen Index r gilt, dann haben wir

$$\nabla F(\mathbf{y}_r + \gamma'_r \mathbf{t}_r)\mathbf{t}_r = \varepsilon_1 \tag{4.15}$$

und damit nach (4.9) die Relation

$$[\nabla F(\mathbf{y}_r) - \nabla F(\mathbf{y}_r + \gamma'_r \mathbf{t}_r)]\mathbf{t}_r \geq \varepsilon - \varepsilon_1 > 0. \tag{4.16}$$

Dies kann aber nicht für unendlich viele Indizies r gelten, da $F(\mathbf{x})$ gleichmäßig stetig ist über der Menge K. Damit haben wir auch den 2 Hilfssatz bewiesen. $\square$

5 Beweis der Konvergenz des Verfahrens

Wir betrachten die Folge $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$, die wir aus dem im 3. Abschnitt angegebenen Verfahren erhalten. Wenn diese Folge endlich ist, dann sind wir nach dem Satz 1 zu einer optimalen Lösung der Aufgabe (1.1) gelangt. Folglich müssen wir uns nur mit dem Fall einer unendlichen Folge beschäftigen. Zu beweisen ist die Relation (3.6), während wir uns um die Konvergenz der Vektoren $\mathbf{x}_k$ nicht kümmern.

Da die Menge der zulässigen Lösungen der Aufgabe (1.1) beschränkt ist, ist auch die Folge $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ beschränkt. Folglich kann man eine konvergente Teilfolge auswählen, deren Elemente mit $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ bezeichnet werden. Sei

$$\mathbf{y}^* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k. \tag{5.1}$$

Wir betrachten die Aufgabe vom Typ (3.1) mit dem Vektor $\mathbf{y}^*$ statt $\mathbf{x}_k$ formuliert:

$$\begin{aligned}
&G_i(\mathbf{y}^*) + \nabla G_i(\mathbf{y}^*)[\mathbf{x} - \mathbf{y}^*] + \vartheta_i y \geq p_i, && i \in I_C,\\
&\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i, && i \in I_L,\\
&\nabla f(\mathbf{y}^*)[\mathbf{x} - \mathbf{y}^*] \leq y,\\
&\min y.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wenn hier $y_{\text{opt}} = 0$ gilt, dann ist y^* eine optimale Lösung der Aufgabe (1.1). Einen indirekten Beweis benutzend, nehmen wir $y_{\text{opt}} = -\delta < 0$ an. Dies ist das Gegenteil der Relation (3.6), daß nämlich solch eine Teilfolge $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$, existiert. Auf der linken Seite der in der oberen Zeile der Aufgabe (5.2) stehenden Nebenbedingungen sind die Gradienten verschieden vom Nullvektor, da $\vartheta_i > 0$ für jedes $i \in I_C$. Daraus folgt, daß eine Umgebung $N(\mathbf{y}^*)$ von $\mathbf{y}^*$ existiert, so daß für jedes $\mathbf{z} \in N(\mathbf{y}^*) \cap D$ für das entsprechende y_{opt}, $y_{\text{opt}} \leq -\dfrac{\delta}{2}$ gilt.

Sei $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k$ (siehe die Beschreibung des Verfahrens im Abschnitt 4) und seien $\mathbf{t}_k$, γ_k Teilfolgen der Folgen $\mathbf{s}_k$, λ_k, die zu den gleichen Indizes gehören, wie die Elemente $\mathbf{y}_k$ in der $\mathbf{x}_k$-Folge. Wenn k hinreichend groß ist, dann gilt $\mathbf{y}_k \in N(\mathbf{y}^*)$. Deshalb erhalten wir unter Berücksichtigung der letzten Nebenbedingung in (5.2) (wenn wir $\mathbf{y}^*$ durch $\mathbf{y}_k$ ersetzen)

$$-\nabla f(\mathbf{y}_k)\mathbf{t}_k \geq \frac{\delta}{2}. \tag{5.3}$$

Nach dem im vorigen Abschnitt bewiesenen Hilfssatz 2 ergibt sich daraus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty, \tag{5.4}$$

und daraus folgt die Relation

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0. \tag{5.5}$$

Sei $0 < \delta_1 < \dfrac{\delta}{2}$. Nach dem Hilfssatz 1 des vorigen Abschnittes ist dann mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Indizes k die Ungleichung

$$-\nabla f(\mathbf{y}_k + \gamma\mathbf{t}_k)\mathbf{t}_k \geq \delta_1 \quad \text{für} \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k \tag{5.6}$$

erfüllt. Demzufolge ist die Funktion f vom Punkt $\mathbf{y}_k$ aus in der Richtung $\mathbf{t}_k$ monoton abnehmend in jedem Punkt des Abschnittes

$$\mathbf{y}_k + \gamma \mathbf{t}_k, \qquad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k, \tag{5.7}$$

einschließlich des sich für $\gamma = \gamma_k$ ergebenden Endpunktes. Folglich wird, wenn wir vom Punkt $\mathbf{y}_k$ ausgehend die Funktion f über dem Durchschnitt der Halbgeraden aus $\mathbf{y}_k$ in die Richtung $\mathbf{t}_k$ mit der Menge D minimieren, das Fortschreiten in die Richtung $\mathbf{t}_k$ durch die Menge D begrenzt, bevor wir einen Minimalpunkt von F entlang dieser Halbgeraden erreichen. Wir betrachten die Nebenbedingungen der Aufgabe (1.1) entlang der Halbgeraden

$$\mathbf{y}_k + \lambda \mathbf{t}_k, \qquad \lambda \geq 0. \tag{5.8}$$

Der Vektor (5.8) liegt in der Menge D, solange

$$\begin{array}{ll} G_i(\mathbf{y}_k + \lambda \mathbf{t}_k) \geq p_i, & i \in I_C, \\ \mathbf{a}_i(\mathbf{y}_k + \lambda \mathbf{t}_k) \geq b_i & i \in I_L \end{array} \tag{5.9}$$

gilt. Die in der zweiten Zeile stehenden Nebenbedingungen sind auch für $\lambda = 1$ sämtlich erfüllt, weil dann

$$\mathbf{y}_k + \mathbf{t}_k = \mathbf{y}_k^*, \tag{5.10}$$

falls $\mathbf{y}_k^*$ die entsprechende Teilfolge von $\mathbf{x}_k^*$ ist. Folglich steht bzw. stehen in (5.9) in der ersten Zeile diejenige Nebenbedingung bzw. diejenigen Nebenbedingungen, welche das Fortschreiten in die Richtung $\mathbf{t}_k$ einschränken. Weil dies für unendlich viele k-Werte so ist und die Anzahl der Nebenbedingungen nur endlich ist, existiert ein $j \in I_C$, für das dies unendlich oft gilt. Wir können annehmen, daß die Folge $\mathbf{y}_k$ so gewählt ist, daß dies mit Ausnahme von höchstens endlich vielen k-Werten gilt. Demzufolge erhalten wir

$$G_j(\mathbf{y}_k + \gamma_k \mathbf{t}_k) = p_j, \qquad k \geq k_0. \tag{5.11}$$

Wegen $\mathbf{y}_k \in D$ ist auch die Ungleichung

$$G_j(\mathbf{y}_k) \geq p_j \tag{5.12}$$

erfüllt. Aus der Gleichung (5.11) ergibt sich unmittelbar

$$\lim_{k \to \infty} G_j(\mathbf{y}_k) p_j. \tag{5.13}$$

Folglich ist für hinreichend großes k die Ungleichung

$$p_j - G_j(\mathbf{y}_k) \geq -\varepsilon \tag{5.14}$$

erfüllt, wobei ε eine vorgegebene positive Zahl ist. Wenn k so groß ist, daß $\mathbf{y}_k \in N(\mathbf{y}^*)$ ist, dann gilt auch, daß für die mit dem Vektor $\mathbf{y}_k$ formulierte Aufgabe (3.1)

$$-y_{\text{opt}} = \frac{\delta}{2} \tag{5.15}$$

besteht. Die Ungleichungen (5.14), (5.15), ferner die aus der mit dem Vektor $\mathbf{y}_k$ formulierten Aufgabe (3.1) erhaltene Ungleichung

$$G_j(\mathbf{y}_k) + \nabla G_j(\mathbf{y}_k)[\mathbf{y}_k^* - \mathbf{y}_k] + \vartheta_j y_{\text{opt}} \geq p_j \tag{5.16}$$

bedingen zusammen die folgende Ungleichung:

$$\nabla G_j(\mathbf{y}_k)\mathbf{t}_k \geq \vartheta_j \frac{\delta}{2} - \varepsilon = \varepsilon_1. \tag{5.17}$$

Die Zahl $\varepsilon > 0$ können wir so klein wählen, daß $\varepsilon_1 > 0$ wird. Weil die Folge γ_k gegen Null strebt, gilt nach dem Hilfssatz 1 des vorigen Abschnittes für jedes $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$

$$\nabla G_j(\mathbf{y}_k + \gamma \mathbf{t}_k)\mathbf{t}_k \geq \varepsilon_2, \qquad 0 \leq \gamma \leq \gamma_k. \tag{5.18}$$

Dies ist ein Widerspruch zu den Relationen (5.11) und (5.12), weil aus diesen folgt, daß die linke Seite in (5.18) im Inneren der Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{y}_k$, und $\mathbf{y}_k + \gamma_k \mathbf{t}_k$ irgendwo gleich Null ist. Damit haben wir bewiesen, daß der folgende Satz gilt.

Satz 2 *Wenn die im 3. Abschnitt erzeugte Folge* $\mathbf{x}_k$ *endlich ist mit dem letzten Element* $\mathbf{x}_N$*, dann gilt*

$$f(\mathbf{x}_N) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}). \tag{5.19}$$

Wenn die Folge $\mathbf{x}_k$ *unendlich ist, so gilt*

$$\lim_{k \to \infty} f(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}). \tag{5.20}$$

Literatur

[1] Arrow, K. J. and A. C. Enthoven (1961). Quasi-concave programming. *Econometria* **29**, 779–800.

[2] Prékopa, A. (1970). On probabilistic constrained programming. *Proc. Princeton Sympos. Math. Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, pp. 113–138.

[3] Prékopa A. (1968). *Lineáris Programozás.* Bolyai János Mat. Társulat, Budapest.

[4] Zoutendijk, G. (1960). *Methods of Feasible Directions.* Amsterdam.